XIV PREMIOS JORGE JUAN DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Viernes, 18 de noviembre de 2011-11-11

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

1. Estudiar en el origen la continuidad de

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

(3 puntos)

Sugerencia: Aplicar el método de la curva general o bien el cambio a polares haciendo un estudio detallado de los extremos de la función denominador, una vez simplificado el factor ρ^2. Resulta de ambas formas que f es continua en el origen.

2. Sea $M=[0,1]\times[0,1]\subset R^2$, $\varphi: M\to R$ una función continua. Estudiar la existencia del límite siguiente y en su caso calcularlo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2 \iint_M (xy(1-x)(1-y))^n \varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

(7 puntos)

Sugerencia: Considerar primero $\varphi(x,y)=x^\alpha y^\beta$ con α y β enteros no negativos. En este caso el cálculo del límite es sencillo. Después por la linealidad de la integral doble se extiende a funciones polinómicas. Y a continuación, se aplica el teorema de Stone/Weierstrass, que afirma que una función continua en un compacto es límite uniforme de funciones polinómicas y se llega al resultado del valor del límite.