XIV PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Primer ciclo.

Alicante, 18 de noviembre de 2011.

Ejercicio 1
Demostrar que no existen tres funciones continuas f, g, y h definidas en $\mathbb{R}$ que satisfacen:

$$h(f(x) + g(y)) = xy$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

h debe ser sobre. Si

$$f(x) = f(x') \text{ entonces: } x = h(f(x) + g(1)) = h(f(x') + g(1)) = x'$$

Con lo que f es inyectiva y por lo tanto estrictamente monótona.
Supongamos que es acotada, $\exists\ \alpha = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ entonces:

$$h(\alpha + g(1)) = \lim_{x\to+\infty} h(f(x) + g(1)) = \lim_{x\to} x = +\infty$$

Con lo que f no puede estar acotada, por lo que f es biyectiva entonces:

$$h(f(x) + g(0)) = 0 \forall x \text{ y por lo tanto } h \equiv 0$$

Ejercicio 2
Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Supongamos que:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \leq f(x)^2 \ \ \forall x \geq 1$$

Demostrar que

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(x - 1)$$

Para $x \geq 1$ se tiene que $F(x) \geq 0$, como $\sqrt{F(x)} \leq f(x)$ entonces:

$$1 \leq \frac{f(x)}{\sqrt{F(x)}}$$

Si tomamos ahora $y > 1$ tenemos:

$$\int_y^x dt \leq \int_y^x \frac{f(t)}{\sqrt{F(t)}} dt$$

$$x - y \leq 2\sqrt{F(t)} \mid_y^x = 2\sqrt{F(x)} - 2\sqrt{F(y)} \leq 2f(x) - 2\sqrt{f(y)}$$

Tomando límites cuando y tiende a 1 se termina:

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)$$