PREMIO JORGE JUAN 2010

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Un barco navega envuelto por una espesa niebla. La última información recibida por su capitán, antes de perder todo contacto con el exterior (satélites incluidos), es que se encuentra a una distancia de 1 km de tierra firme, y que la costa más próxima es totalmente rectilínea. El capitán desea echar el ancla junto a la orilla cuanto antes. Se pide:

1. Formular un modelo de optimización que asegure la llegada a la orilla en el menor tiempo posible en el peor caso (el capitán es de temperamento pesimista). Si existiese solución óptima, ¿podría ser única?
2. Aconsejar un rumbo al capitán, sabiendo que sólo dispone de regla y compás para dibujarlo sobre la carta naútica. ¿Cuál es la longitud del rumbo propuesto?

Nota: si no puede encontrase el rumbo óptimo, encuentre al menos un rumbo factible (que asegure la llegada a la orilla en el peor caso) razonablemente bueno.

Algunas posibles respuestas

El barco debe avanzar a toda máquina a lo largo del rumbo decidido, que deberá ser el más corto posible de los que unen la ubicación actual del barco, que podemos suponer es $(0,0)$, con un punto de la costa, que es una recta tangente a la circunferencia $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. Como habrá que atravesar S en algún punto, siempre será preferible navegar hasta ese punto en línea recta, de modo que inicialmente se recorrerá un radio arbitrariamente elegido, por ejemplo, el segmento $[(0,0),(1,0)]$.

1. Podemos formular un modelo de optimización en el que se elige un rumbo, representado por una aplicación $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ cuya variable t representa el tiempo medido en cierta escala, y la imagen $f(t) = (x(t), y(t))$ la posición del barco en el instante t. Suponiendo que f es de clase C^1 a trozos (hipótesis razonable), el problema, (P), consiste en minimizar la longitud de la curva imagen de f, es decir, el funcional

$$I(f) = \int_0^1 \|f'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

sujeto a dos condiciones:

(A) El rumbo arranca de $(0,0)$, es decir, $x(0) = y(0) = 0$.

(B) El rumbo interseca todas las rectas tangentes a S, es decir, tiene solución el sistema (de una ecuación no lineal y dos ecuaciones lineales) en la variable t

$$\{(\cos s)\, x(t) + (\operatorname{sen} s)\, y(t) = 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

para todo $s \in [0, 2\pi]$.

El modelo de optimización

$$(P) \quad \inf\{I(f) \text{ sujeto a las condiciones A y B}\}$$

es de cálculo variacional, con una condición inicial A y otra no estándar B.

Hay otros modelos alternativos, pero ninguno de ellos es estándar (resoluble mediante un método analítico).

La factibilidad y la longitud de los rumbos se mantiene a través de giros centrados en $(0,0)$ y de simetrías respecto de cualquier eje que contenga a $(0,0)$, de modo que (P) tiene infinitas soluciones óptimas o ninguna.

2. Como (P) es demasiado complicado y, además, el capitán sólo dispone de regla y compás, nos limitamos a considerar rumbos formados por segmentos y arcos de circunferencia (a pesar de reducir el conjunto factible del problema, seguimos sin saber si el problema tiene o no solución óptima). Describiremos, y evaluaremos, cuatro rumbos factibles, que aparecen ordenados según longitudes decrecientes.

(a) Alcanzada la circunferencia S en $(1,0)$, navegamos sobre S un arco de longitud $\pi + \theta$, con $\theta \in \left]0, \pi\right]$, de cuyo extremo salimos en dirección tangente hasta alcanzar la recta tangente a S en $(1,0)$. Obsérvese que si se recorre toda la circunferencia (Figure 6.a), el rumbo mide $1 + 2\pi = 7,2832$ km, que no es el rumbo más corto de esta familia. En efecto, si se recorre un arco de longitud $\pi + \theta$ sobre S, con $\theta \in \left]0, \pi\right[$, la longitud del rumbo completo es $f(\theta) = 1 + \pi + \theta + \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. Como $f'(\theta) = \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}$ es negativa en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y positiva en $\left]\frac{\pi}{2}, 1\right[$, el mínimo -para esta clase de rumbos- se alcanza en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (donde f pasa de ser decreciente a ser creciente). En el rumbo óptimo de esta familia abandonamos S en el punto $(0, -1)$, es decir, volvemos a navegar hacia el Este en el segundo tramo rectilíneo, recorriendo en total $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6.7124$ km.

Pero no hay razón para navegar todo el tiempo dentro del círculo unidad. Cortando este nudo gordiano encontramos soluciones factibles mejores.

(b) El barco navega en línea recta más allá de S, concretamente hasta la intersección de aquella recta con la recta perpendicular al extremo de un radio que forme un ángulo de 45^o con la elegida, regresa a S siguiendo la recta tangente, recorre media circunferencia y sigue por la tangente 1 km (la Figura 6b es levemente defectuosa, pues los puntos del rumbo situados más al Este debieran ser $(1, \pm 1)$). La longitud de este rumbo es $\pi + 2 + \sqrt{2} = 6.5556$ km. En esta solución factible, el ángulo que forman el radio elegido inicialmente con la semirrecta que pasa por el punto final del rumbo, $(1, -1)$, es de 90^o (dos veces 45^o), es decir, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ radianes.

(c) Se puede flexibilizar la construcción anterior tomando un ángulo $\theta \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ en lugar de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La logitud del rumbo, C_θ, es entonces $f(\theta) = 2\pi - 4\theta + 2\tan\theta + \sec\theta$, cuyo mínimo en $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ se alcanza en la solución de $f'(\theta) = 2 + \sin\theta - 4(\cos\theta)^2 = 0$, que es $\overline{\theta} = 0,6349$ radianes (es decir, $36{,}37^o$), con $f\left(\overline{\theta}\right) = 6,4589$ km.

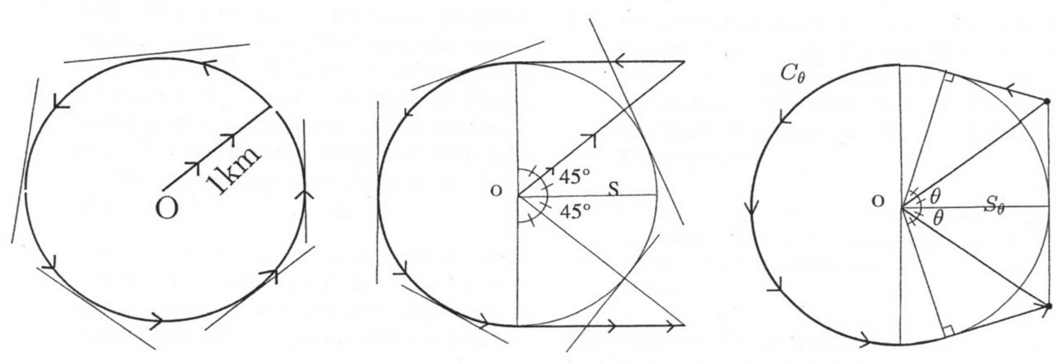

Figure 6.a. Figure 6.b. Figure 6.c.

(d) Otro rumbo factible consiste en salir de $(0, 0)$ siguiendo la semirrecta que forma un ángulo de 30^o con el eje de abscisas hasta llegar al punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; a continuación, se regresa a S por la tangente, y se navega sobre dicha circunferencia hasta llegar a $(0,-1)$; por último, se navega en línea recta sobre la tangente a S en $(0,-1)$ hasta llegar a $(1,-1)$, que es el punto final del rumbo, cuya longitud es

$$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{7}{6}\pi+1=1+\sqrt{3}+\frac{7}{6}\pi=6.\,3972 \text{ km}.$$

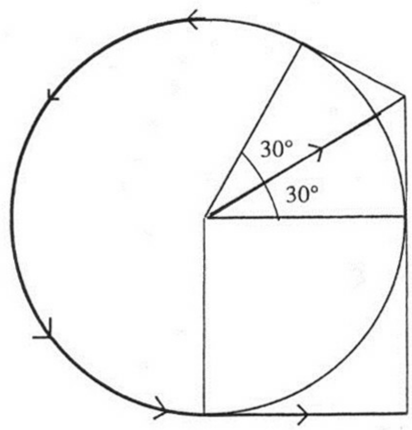

Figure 1: Rumbo (d)

El rumbo de la Figure 6.a es el primero que se le ocurre a cualquiera que piense un poco en el problema, siendo natural compararlo con los que resultan de salirse por la tangente. Los rumbos (c) y (d) fueron propuestos a Hiriart-Urruty ([1]) por sus alumnos de un máster en ingeniería. El rumbo descrito en (d) es una solución óptima de (P), pero la única prueba conocida de dicha optimalidad, debida a Joris ([2]), está basada en técnicas sofisticadas de análisis matemático. Encontrar una prueba elemental y más corta es un reto para los curiosos.

El problema bidimensional del enunciado se generaliza a una dimensión arbitraria n como sigue: "encuentre una curva en $\mathbb{R}^n$ de mínima longitud entre aquellas que salen del origen e intersecan a todos los hiperplanos tangentes a la esfera unidad $S=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$". La curva más corta conocida de $\mathbb{R}^3$ que interseca a todos los planos tangentes a la esfera unidad fue encontrada en 2006, y tiene una longitud de 13,6699 km. Desgraciadamente, aún no se sabe si es óptima o no.

References

[1] Hiriart-Urruty, J.-B., "Du calcul différentiel au calcul variationnel: un aperçu de l'évolution de Pierre Fermat à nos jours", *Quadrature* 70 (2008) 8-18.

[2] Joris, H., "Le chasseur perdu dans la forêt: un problème de géometrie plane", *Elemente der Mathematik* 35 (1980) 1-4.