XIII Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Polinomios de Lagrange

1. Supongamos que $L_{n,k}(x),\ k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$ son los polinomios de Lagrange y que $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ son los nodos de interpolación. Pruebe que, cualquiera que sea $x \in R$,

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k L_{n,j}(x) = x^k,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

2. Supongamos que $n = 2$ y sean $L_{2,0}$, $L_{2,1}$ y $L_{2,2}$ los tres polinomios de Lagrange obtenidos mediante tres nodos igualmente espaciados en el intervalo $[x_0, x_2]$.
   Halle, **sin utilizar el cálculo diferencial**

$$max_{[x_0,x_2]}|L_{2,j}(x)|,\ j = 0, 1, 2.$$

Solución

1. Si tenemos en cuenta que

$$L_{n,j}(x_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = p \\ 0 & \text{si } j \neq p, \end{cases}$$

   al sustituir x por $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ en ambos miembros de la igualdad, observamos que ambos polinomios, de grado inferior o igual a n coinciden en $n+1$ puntos, luego se trata del mismo polinomio.

2. Los tres polinomios de Lagrange son parábolas y su máximo-mínimo se encuentra en el punto medio entre sus raíces o en uno de los extremos del intervalo $[x_0, x_2]$.
   En cualquiera de los tres casos se comprueba que el máximo del valor absoluto de cada uno de los polinomios de Lagrange de grado 2 es 1.