XIII PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Se consideran, $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, $f : V \to \mathbb{R}$ la aplicación que a cada matriz $A \in V$ le asigna su traza, es decir $f(A) = \operatorname{tr} A$, y $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\Phi(A, B) = f(AB^t)$. Se pide:

1. Demostrar que f es lineal y que $f(A) = f(A^t)$ para cualquier $A \in V$.

2. Demostrar que define un producto escalar sobre V.

3. Hallar una base de $\ker f$.

4. Demostrar que $AB - BA \in \ker f$, para todo $A, B \in V$.

5. Encontrar un subespacio W de V tal que $V = \ker f \oplus W$.

6. Demostrar que si $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $g(AB) = g(BA)$, para todo $A, B \in V$ y $g(I_2) = 2$, entonces $g = f$.

Solución:

1. $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) = \operatorname{tr} A$ es una aplicación lineal ya que se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) $f(A + B) = f(A) + f(B)$, cualesquiera que sean $A, B \in V$. En efecto, dadas dos matrices $A, B \in V$, $f(A + B) = \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B = f(A) + f(B)$.

b) $f(\lambda A) = \lambda f(A)$, cualesquiera que sean $A \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En efecto, dada una matriz $A \in V$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda A) = \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A) = \lambda f(A)$.

Además, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$, $f(A) = \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = \operatorname{tr} A^t = f(A^t)$.

2. Para que Φ defina un producto escalar sobre V deben cumplirse las siguientes propiedades:

a) $\Phi(A, B) = \Phi(B, A)$, $\forall A, B \in V$.

b) $\Phi(A + C, B) = \Phi(A, B) + \Phi(C, B)$, $\forall A, B, C \in V$.

c) $\Phi(\lambda A, B) = \lambda \Phi(A, B)$, $\forall A, B \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

d) $\Phi(A, A) \geq 0$, $\forall A \in V$ y $\Phi(A, A) > 0$, si $A \neq O$.

En efecto, dados $A, B \in V$,

$$\Phi(A, B) = f\left(AB^t\right) \underset{(1)}{=} f\left(\left(AB^t\right)^t\right) = f\left(\left(B^t\right)^t A^t\right) = f\left(BA^t\right) = \Phi(B, A).$$

Dados $A, B, C \in V$,

$$\Phi(A + C, B) = f\left((A + C) B^t\right) = f\left(AB^t + CB^t\right) \underset{f \text{ lineal}}{=} f\left(AB^t\right) + f\left(CB^t\right) = \Phi(A, B) + \Phi(C, B).$$

Sean $A, B \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\Phi(\lambda A, B) = f\left((\lambda A) B^t\right) = f\left(\lambda\left(AB^t\right)\right) \underset{f \text{ lineal}}{=} \lambda f\left(AB^t\right) = \lambda \Phi(A, B).$$

Por último, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$, se tiene que

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(A, A) = f\left(AA^t\right) = \operatorname{tr}\left(AA^t\right) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0.$$

Además, $\Phi(A, A) > 0$ cuando $A \neq O$.

3. Por definición, $\ker f = \{A \in V \mid f(A) = 0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \mid a_{11} + a_{22} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \mid a_{11} = -a_{22}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \mid a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, un sistema de generadores de $\ker f$ es el conjunto

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

que además es un conjunto de vectores linealmente independientes y, por tanto, una base de $\ker f$.

4. Para que $AB - BA \in \ker f$ debe cumplirse que $f(AB - BA) = 0$ o, lo que es lo mismo, $f(AB) = f(BA)$. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

y $f(AB) = \operatorname{tr}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$.

Por otro lado,

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

y $f(BA) = \operatorname{tr}(BA) = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}$, lo que concluye que $f(AB) = f(BA)$.

5. Puesto que (V, Φ) es un espacio euclídeo, se sabe que $V = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$, así que buscamos $W = (\ker f)^{\perp}$.

$$W = (\ker f)^{\perp} = \{A \in V \mid \Phi(A, X) = 0, \forall X \in \ker f\} = \{A \in V \mid \Phi(A, E_i) = 0,\ i = 1, 2, 3\},$$

es decir, buscamos las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tales que

$$\Phi(A, E_1) = f\left(AE_1^t\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -a_{11} + a_{22} = 0,$$

$$\Phi(A, E_2) = f\left(AE_2^t\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} = 0$$

y

$$\Phi(A, E_3) = f\left(AE_3^t\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = a_{21} = 0.$$

Por lo tanto,

$$W = (\ker f)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{11} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de W es la matriz $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Puesto que $\{E_1, E_2, E_3, I_2\}$ es una base de V, cualquier $A \in V$ se puede expresar de forma única como $A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 I_2$ y $g(A) = \lambda_1 g(E_1) + \lambda_2 g(E_2) + \lambda_3 g(E_3) + \lambda_4 g(I_2)$. Si demostramos que $g(E_1) = f(E_1)$, $g(E_2) = f(E_2)$, $g(E_3) = f(E_3)$ y $g(I_2) = f(I_2)$, tendremos que $g(A) = f(A)$, cualquiera que sea A.

Por hipótesis, $g(I_2) = 2$ y $f(I_2) = \operatorname{tr} I_2 = 2$.

Por otro lado,

$$AB - BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} & b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11}) \\ b_{21}(a_{22} - a_{11}) + a_{21}(b_{11} - b_{22}) & a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}) E_1 + (b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})) E_2 + (b_{21}(a_{22} - a_{11}) + a_{21}(b_{11} - b_{22})) E_3.$$

Si $\mu_1 := a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \neq 0$, $a_{11} = a_{22}$ y $b_{11} = b_{22}$, se tiene $AB - BA = \mu_1 E_1$. Puesto que, por hipótesis, $g(AB) = g(BA)$ o lo que es lo mismo $g(AB - BA) = 0$, se tiene que $g(AB - BA) = \mu_1 g(E_1) = 0$. Puesto que $\mu_1 \neq 0$, $g(E_1) = 0 = f(E_1)$.

Del mismo modo se obtiene $g(E_2) = 0 = f(E_2)$, tomando $b_{21} = 0$, $a_{21} = 0$ y $b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11}) \neq 0$, y $g(E_3) = 0 = f(E_3)$, tomando $b_{12} = 0$, $a_{12} = 0$ y $b_{21}(a_{22} - a_{11}) + a_{21}(b_{11} - b_{22}) \neq 0$.