XII Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Sistemas lineales perturbados

Supongamos que $Ax = b$ es un sistema resoluble de ecuaciones lineales, H es una perturbación de la matriz del sistema y k es una perturbación del término independiente. Supongamos que la solución del sistema perturbado es $x + h$. Se tendrá que

$$(A + H)(x + h) = b + k.$$

Se puede probar que el error relativo de la solución, $\dfrac{\|h\|}{\|x\|}$ verifica

$$0 \leq \frac{\|h\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{Cond}(A)}{1 - \operatorname{Cond}(A)\dfrac{\|H\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|k\|}{\|b\|} + \frac{\|H\|}{\|A\|} \right), \tag{1}$$

donde

$$\operatorname{Cond}(A) = \|A\| \left\| A^{-1} \right\|.$$

La norma vectorial que se maneja es la norma infinito y la norma matricial es la deducida de la norma infinito (norma fila):

$$\|A\| = \max_{i=1,2,3,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Supongamos que $A = \operatorname{diag}[1, 2, 3, ..., 10]$ y $\|b\|_\infty = 1$. La información para este apartado es que los elementos de la matriz H y del vector k están acotados en valor absoluto por el número $\varepsilon < 0'1$. Pruebe que:

$$\frac{\|h\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{20\varepsilon}{1 - 10\varepsilon}.$$

2. Si, además,

$$b = \begin{bmatrix} 0'1 \\ 0'2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad H = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

pruebe que

$$\frac{\|h\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{20\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Solución.

1.- Basta tener en cuenta que

$\|A\|_\infty = 10,\ \|A^{-1}\|_\infty = 1,\ Cond_\infty(A) = 10,\ \|H\|_\infty \leq 10\varepsilon,\ \|b\|_\infty = 1$ y $\|k\|_\infty \leq \varepsilon.$

Aplicamos la fórmula (1) y se obtiene el resultado.

2.- Este apartado se resuelve calculando el valor de x y de h.

$$x = A^{-1}b, \quad h = (A+H)^{-1}(k - Hx).$$

Se obtiene

$$x = [0'1, 0'1, \cdots, 0'1]', \quad (A+H)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\varepsilon} & \frac{-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} & \cdots & \frac{-\varepsilon}{10(1+\varepsilon)} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

$$k - Hx = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

y el resultado sigue de forma inmediata.