

XII EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 09/10

PROBABILIDAD

Seguro que todos tenéis el típico amigo de “letras” que, desde que se enteró de que estudiáis matemáticas, y más concretamente probabilidad, no deja de daros la paliza con preguntas sobre los temas que debe estudiar o las preguntas que debe responder para tener una considerable probabilidad de aprobar y a continuación os cuenta el tipo de asignatura, el formato del examen... y otros aspectos de su vida que a vosotros, realmente, no os importan lo más mínimo.

Concretamente, uno de los formatos habituales en este contexto es una asignatura que consta de n temas de los que se eligen m al azar y se aprueba si se responde correctamente, al menos, a la mitad de ellos. Bajo este formato y con $n=25$ y $m=2$, dadle gusto a vuestro amigo y respondedle a las siguientes preguntas, aunque sólo sea para que os deje tranquilos de una vez.

- ¿Cuántos temas debe estudiar, como mínimo, para maximizar la probabilidad de aprobar?
- Hasta vuestro amigo se ha dado cuenta de la estupidez que acaba de preguntar, así que replantea su pregunta. ¿Cuántos temas debe estudiar como mínimo para que la probabilidad de aprobar sea mayor que la de suspender? ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?
- Tras responderle, si es que lo has hecho correctamente, él mismo se ha sorprendido de lo poco que hay que estudiar hoy en día para aprobar. Lo que este pobre infeliz no sabe es que debido al poco tiempo que dedica a preparar el examen y, seamos sinceros, a su limitada capacidad, la probabilidad de responder mal a cualquiera de los temas que ha estudiado es igual a la proporción de temas que ha estudiado.

c.1) ¿Cuál es ahora la probabilidad de aprobar habiendo estudiado el número de temas que le aconsejaste en el apartado b?

c.2) ¿Cuál es realmente el número de temas a estudiar que maximiza la probabilidad de aprobar? ¿Cuánto vale dicha probabilidad?

Por si alguien lo necesita, aquí tenéis la solución real de Cardano para una ecuación de tercer grado. Si no la necesitáis... mal asunto.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = -\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt[3]{2} \Delta_1}{3a \left(\Delta_2 + \sqrt{4\Delta_1^3 + \Delta_2^2} \right)^{1/3}} + \frac{\left(\Delta_2 + \sqrt{4\Delta_1^3 + \Delta_2^2} \right)^{1/3}}{3\sqrt[3]{2} \Delta_1}$$

$$\Delta_1 = -b^2 + 3ac$$

$$\Delta_2 = -2b^3 + 9abc - 27a^2d$$

a) Evidentemente, tendrá que estudiar **24 temas**.

b) De los 25 temas de que consta el temario, sea k el número de temas que estudia y por tanto $25 - k$, los que no estudia. Puesto que se seleccionan aleatoriamente 2 temas, definimos la variable aleatoria

$$X = \text{"nº de temas seleccionados que el alumno ha estudiado"} \sim H(25, k, 2)$$

$$P(\text{aprobar}) = p(1) + p(2) = 1 - p(0) \geq 0.5 \rightarrow p(0) \leq 0.5$$

$$p(0) = \frac{\binom{k}{0} \binom{25-k}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{(25-k)(24-k)}{25 \times 24} \leq 0.5$$

$$600 - 49k + k^2 \leq 300$$

$$x^2 - 49k + 300 = 0 \rightarrow k = 7.17$$

$$p(7) = 0.51 \quad \text{y} \quad p(8) = 0.4533$$

Por lo tanto, deberá estudiar, por lo menos **8 temas** para que la probabilidad de aprobar sea superior a la de suspender, y dicha probabilidad es **0.5466**.

c) Siguiendo la notación del apartado anterior tendremos que la probabilidad de responder mal a uno de los temas que se estudiado es $p = \frac{k}{25} = \frac{8}{25} = 0.32$, por lo que la probabilidad de aprobar si se estudian 8 temas será:

$$\begin{aligned} P(\text{suspender}) &= P(X=0) + P(\text{Responder mal} \mid X=1)P(X=1) \\ &\quad + P(\text{Responder mal a las dos} \mid X=2)P(X=2) = \\ &= \frac{\binom{17}{2}}{\binom{25}{2}} + \frac{\binom{8}{1} \binom{17}{1}}{\binom{25}{2}} \frac{8}{25} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{25}{2}} \left(\frac{8}{25}\right)^2 = 0.6080 \end{aligned}$$

c.1) Por lo que $P(\text{aprobar} \mid X=8) = \mathbf{0.392}$.

c.2) El resultado se obtiene minimizando la probabilidad de suspender que, evidentemente, es equivalente a maximizar la probabilidad de aprobar. Para ello definimos la variable $x = \text{nº de temas estudiados}$, y los sucesos $S_i = \text{nº de temas del examen que el alumno ha estudiado}$, $i = 0, 1, 2$, con lo que la probabilidad de suspender será

$$\begin{aligned}
P(\text{suspender}) &= P(S_0) + P(\text{Responder mal} | S_1)P(S_1) + \\
&+ P(\text{Responder mal a las dos} | S_2)P(S_2) = \\
&= \frac{\binom{25-x}{2}}{\binom{25}{2}} + \frac{\binom{x}{1}\binom{25-x}{1}}{\binom{25}{2}} \frac{x}{25} + \frac{\binom{x}{2}}{\binom{25}{2}} \left(\frac{x}{25}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{375000} (375000 - 30625x + 1875x^2 - 51x^3 + x^4)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P(\text{suspender}) = 4x^3 - 153x^2 + 3750x - 30625 = 0$$

Aplicando la expresión de la solución real de Cardano para una ecuación de tercer grado, obtenemos:

$$\Delta_1 = 21591$$

$$\Delta_2 = -261846$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{153}{12} - \frac{21591 \sqrt[3]{2}}{12 \left(-261846 + \sqrt{4 \times 21591^3 + 261846^2} \right)^{1/3}} + \\
&+ \frac{\left(-261846 + \sqrt{4 \times 21591^3 + 261846^2} \right)^{1/3}}{12 \sqrt[3]{2}} = 12.4132
\end{aligned}$$

Y puesto que la probabilidad de suspender si se estudian 12 temas es 0.5603 y si se estudian 13 es 0.5607, el número de temas a estudiar para maximizar la probabilidad de aprobar son **12 temas**, que tampoco son tantos, pero la probabilidad de aprobar es **0.4397**. Conclusión, respondedle que el próximo año prepare el examen con más tiempo.