XII PREMIOS JORGE JUAN
CÁLCULO: Primer Ciclo
Alicante, 27 de noviembre de 2009

Ejercicio 1
Demostrar que:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n}>n$ para todo entero positivo n. *(2 puntos)*

b) mín $\left\{k \in N,\ k>2 \ \ y \ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}>n\right\}>2^n$ para todo entero $n \geq 1$. *(3 puntos)*

Ejercicio 2
Hallar las integrales:

a) $\int \frac{x+senx-\cos x-1}{x+e^x+senx}\,dx.$ *(2 puntos)*

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx.$ *(3 puntos)*

XII PREMIOS JORGE JUAN
CÁLCULO: Primer Ciclo
Alicante, 27 de noviembre de 2009

Ejercicio 1
Demostrar que:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n} > n$ para todo entero positivo n. *(2 puntos)*

b) mín $\left\{ k \in N,\, k \geq 2 \;\; y \;\; \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k} > n \right\} > 2^n$ para todo entero $n \geq 1$. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN:

a)
$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{2n-1}+1}+\frac{1}{2^{2n}+2}+...+\frac{1}{2^{2n}}\right) > \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+...+\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = 2n\cdot\frac{1}{2} = n,$$
para todo entero positivo n.

b) Por la parte a) $\left\{ k \in N,\, k \geq 2 \;\; y \;\; \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k} > n \right\}$ es un conjunto de enteros no negativos distinto del vacío; por tanto tiene mínimo x_n. Probaremos por inducción que $x_n > 2^n$ para todo entero positivo n.

Para $n=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$ y así $x_1 = 4 > 2^1$.

Si $x_n > 2^n$ para algún $n \geq 1$, entonces $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n} \leq n$. Como
$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+...+\frac{1}{2^{m+1}} < \frac{2^n}{2^n+1} < 1$ para $n \geq 2$, sumando las dos desigualdades se llega a que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^{n+1}} < n+1$, lo que demuestra que $x_{n+1} > 2^{n+1}$.

Ejercicio 2
Hallar las integrales:

a) $\int \frac{x+senx-\cos x-1}{x+e^x+senx}\,dx$. *(2 puntos)*

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN:

a) Sumando y restando e^x al numerador del integrando resulta
$$\int \frac{x+senx-\cos x-1}{x+e^x+senx}dx = x+\ln(x+e^x+senx)+C.$$

b) Mediante la sustitución $t=\frac{\pi}{4}-x$ la integral dada se convierte en
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-1)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}\,dt = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

Entonces $I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$