

XII PREMIOS JORGE JUAN
ANÁLISIS MATEMÁTICO: Segundo Ciclo
Alicante, 27 de noviembre de 2009

Calcular la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{y} \operatorname{sen}^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} dx dy.$$

XII PREMIOS JORGE JUAN
ANÁLISIS MATEMÁTICO: Segundo Ciclo
Alicante, 27 de noviembre de 2009

Calcular la siguiente integral doble:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{y} \operatorname{sen}^2 x)^{-\frac{1}{2}} dx dy.$$

SOLUCIÓN:

La función $f(x, y) = (1 - \sqrt{y} \operatorname{sen}^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ es continua en $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] - \left\{\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)\right\}$.

Así es integrable en Ω .

Hagamos primeramente el siguiente cambio de variables: $\begin{cases} x = \varphi \\ y = r^4 \end{cases}$,

$0 < r \leq 1$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, siendo el jacobiano $J \begin{pmatrix} x & y \\ \varphi & r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4r^3 \end{vmatrix} = 4r^3 > 0$.

Entonces $I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4r^3}{\sqrt{1 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi \right) dr$.

Pasando de nuevo a coordenadas cartesianas $\begin{cases} u = r \cos \varphi \\ v = r \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$, $0 < r \leq 1$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

siendo el jacobiano $J \begin{pmatrix} u & v \\ \varphi & r \end{pmatrix} = J = \begin{vmatrix} -r \operatorname{sen} \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} = r > 0$,

de donde $J \begin{pmatrix} \varphi & r \\ u & v \end{pmatrix} = J^{-1} = \frac{1}{r} > 0$. Por tanto $0 < u \leq 1$, $0 < v \leq \sqrt{1 - u^2}$ o bien

$0 < v \leq 1$, $0 < u \leq \sqrt{1 - v^2}$ y entonces:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{4(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - v^2}} du dv = \int_0^1 \frac{4}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\frac{u^3}{3} + v^2 u \right) \Big|_0^{\sqrt{1-v^2}} dv =$$

$$\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{1 - v^2}} \left[\frac{1}{3} \sqrt{1 - v^2} (1 - v^2) + v^2 \sqrt{1 - v^2} \right] dv = 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} v^2 \right) dv = \frac{20}{9}.$$