PREMIO JORGE JUAN 2009

PROBLEMA DE ANÁLISIS CONVEXO

Considere los puntos del plano $P_1\,(0,0)$, $P_2\,(1,0)$ y $P_3\,(0,2)$. Se pide hallar todos los puntos $P\,(x,y)$ que minimizan las siguientes funciones de P:

(a) La suma de los cuadrados de las distancias euclídeas desde P a P_1, P_2 y P_3.

(b) La suma de las distancias euclídeas desde P a P_1, P_2 y P_3.

(c) La suma de las distancias de Manhattan desde P a P_1, P_2 y P_3.

Se valorará la justificación de las respuestas (en particular la existencia y unicidad de la solución encontrada).

Ayudas:

1. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2$ entre $P\,(x,y)$ y $P_i\,(x_i,y_i)$ es $\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$ mientras que la distancia de Manhattan entre ambos es $\max\{|x-x_i|\,,|y-y_i|\}$.

2. El centro isogónico del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 (es sdecir, el punto desde el cual se ven los tres lados del triángulo con ángulos iguales) es $(0.304\,5, 0.254\,57)$.

Respuesta

(a) Se minimiza $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2$, que es función diferenciable y coerciva ($\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$).

La coercividad implica que el mínimo global se alcanza.

Se puede concluir que hay un único mínimo global demostrando que f es estrictamente convexa. La otra opción es calculándolo y probando que no hay otro.

La diferenciabilidad implica que los mínimos locales satisfacen la condición de Fermat $\nabla f(x,y) = 0_2$. La única solución de este sistema de ecuaciones lineales (pues f es cuadrática) es $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Así, pues, el único candidato a mínimo global, $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, es la única solución óptima.

(b) Ahora se minimiza $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2}$, que también es coerciva (por lo que se alcanza el mínimo) pero que no es diferenciable en $P_i, i = 1,2,3$.

Por lo tanto los candidatos a mínimo local son $P_i, i = 1,2,3$ y las soluciones del sistema no lineal $\nabla f(x,y) = 0_2 = (0,0)$. Este sistema se puede resolver numéricamente (por ejemplo, con el método de Newton), o utilizando la ayuda, si se demuestra que desde un punto $P(x,y)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \dfrac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

se observan los tres lados del triángulo bajo un ángulo de 120^o. Para ello, se calculan el vector unitario en la dirección de P a P_i, $i = 1,2,3$, por ejemplo, el 1^o es $u_1 = -\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, etc. Entonces, (1) se puede escribir como

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0_2. \tag{2}$$

Multiplicando escalarmente (2) por u_1, por u_2 y por u_3 se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \langle u_1, u_2\rangle + \langle u_1, u_3\rangle = 0 \\ \langle u_1, u_2\rangle + 1 + \langle u_2, u_3\rangle = 0 \\ \langle u_1, u_3\rangle + \langle u_2, u_3\rangle + 1 = 0 \end{array} \right\},$$

que sólo es posible si $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = -\frac{1}{2}$, es decir, si los ángulos entre cualquier par de esos vectores mide 120^o.

Así, pues, el mínimo se alcanza en uno de los vértices o en el punto isogónico. Como $f(0.304\,5, 0.254\,57) < f(P_i,), i = 1,2,3$, el único mínimo global es el punto isogónico.

Si no se encuentra dicho punto, se puede concluir que hay un único mínimo global demostrando que f es estrictamente convexa.

(c) La función a minimizar es $f(x,y) = \max\{|x|,|y|\} + \max\{|x-1|,|y|\} + \max\{|x|,|y-2|\}$.

De nuevo f es coerciva, pero no es diferenciable sobre un conjunto infinito (las rectas $x=0, x=1$, $y=0$, $y=2$, $x=\pm y$, $x-1=\pm y$ y $x=\pm(y-2)$), por lo que el cálculo diferencial no ayuda a seleccionar candidatos. También ahora f es convexa, aunque no es estrictamente convexa.

Los puntos exteriores al rectángulo $C=[0,1]\times[1,2]$ son soluciones dominadas, por lo que podemos buscar los mínimo de $f(x,y) = \max\{x,y\} + \max\{1-x,y\} + \max\{x,2-y\}$ sobre C. Una manera cómoda de resolver este problema es replanteándolo como un problema de programación lineal que puede resolverse fácilmente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & z \\
\text{s.a} & x \leq z \\
 & y \leq z \\
 & 1-x \leq z \\
 & 2-y \leq z \\
 & 0 \leq x \leq 1 \\
 & 2x+y \leq 2 \\
 & y \geq 0.
\end{array}
$$

Este problema se resuelve fácilmente observando que las inecuaciones 2^a y 4^a implican $z \leq 1$ y que este valor se alcanza, por ejemplo, en $(0,1,1)$. Poniendo $z=1$ en las restricciones se obtiene entonces el conjunto óptimo: los puntos (x,y) tales que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $y=1$. Por lo tanto, las soluciones óptimas son los puntos de la forma $P(x,1)$ tal que $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.