XII PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Se consideran E y F espacios vectoriales reales de dimensión finita, E dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y $f : F \to E$ una aplicación lineal. Se define la aplicación $\Phi : F \times F \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

Se pide:

1. Estudiar bajo qué condiciones define Φ un producto escalar sobre F.

2. Si B y B' son bases de F y E, respectivamente, A es la matriz asociada a f respecto de dichas bases, y P_E es la matriz, en la base B', del producto escalar de E, demostrar que, bajo las condiciones del apartado anterior, la matriz, en la base B, del producto escalar de F es $P_F = A^T P_E A$.

3. En el caso particular de que $F = \mathbb{P}_2$ (espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales de grado menor o igual que 2), $E = \mathbb{R}^4$ dotado del producto escalar usual, y $f : F \to E$ es la aplicación lineal dada por

$$f(p(t)) = (a_0 - a_2, 2a_0 + a_1, -a_1 + a_2, a_0 + a_2)$$

para $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, demostrar que la aplicación Φ define un producto escalar sobre F.

4. Si consideramos el espacio vectorial $F = \mathbb{P}_2$ dotado del producto escalar del apartado anterior, encontrar una base ortogonal para F.

Solución:

1. Las propiedades que se deben cumplir para que Φ defina un producto escalar sobre F son:

a) Simétrica: $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$, $\forall x, y \in F$.

En efecto, $\Phi(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle = \Phi(y, x)$, por cumplirse la propiedad simétrica para el producto escalar de E.

b) Distributiva: $\Phi(x, y + z) = \Phi(x, y) + \Phi(x, z)$, $\forall x, y, z \in F$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y + z) &= \langle f(x), f(y + z) \rangle = \langle f(x), f(y) + f(z) \rangle \\ &= \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(x), f(z) \rangle = \Phi(x, y) + \Phi(x, z), \end{aligned}$$

por ser f lineal y cumplirse la propiedad distributiva para el producto escalar de E.

c) $\Phi(\lambda x, y) = \lambda\Phi(x, y), \forall x, y \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

En efecto, $\Phi(\lambda x, y) = \langle f(\lambda x), f(y)\rangle = \langle \lambda f(x), f(y)\rangle = \lambda \langle f(x), f(y)\rangle$, por ser f lineal y cumplirse la propiedad para el producto escalar de E.

d) $\Phi(x, x) > 0, \forall x \in F \setminus \{0_F\}$.

En efecto, $\Phi(x, x) = \langle f(x), f(x)\rangle > 0$ cuando $f(x) \neq 0_E$. Además, $f(x) = 0_E$ si, y sólo si, $x \in \ker f$ (núcleo de la aplicación lineal f). Así pues, $\Phi(x, x) > 0$ para todo $x \notin \ker f$.

Por lo tanto, la condición que debe cumplirse para que Φ defina un producto escalar sobre F es que $\ker f = \{0_F\}$ o, lo que es lo mismo, f debe ser inyectiva.

2. Supongamos que $\dim F = n$. Sean $x, y \in F$ y supongamos que $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ son las componentes de x e y en la base B. Sean $X := (x_1, \ldots, x_n)^T$ e $Y := (y_1, \ldots, y_n)^T$.

Por ser A la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', AX y AY son las matrices columna que contienen las coordenadas de $f(x)$ y $f(y)$ en la base B'.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \langle f(x), f(y)\rangle = (AX)^T P_E (AY) \\ &= \left(X^T A^T\right) P_E (AY) = X^T \left(A^T P_E A\right) Y.\end{aligned}$$

Luego $P_F = A^T P_E A$.

3. Consideramos $B = \{1, t, t^2\}$ base de $F = \mathbb{P}_2$ y C la base canónica de $E = \mathbb{R}^4$. Las imágenes por f de los elementos de la base B son $f(1) = (1, 2, 0, 1)$, $f(t) = (0, 1, -1, 0)$ y $f(t^2) = (-1, 0, 1, 1)$, por lo que la matriz asociada a f respecto de las bases B y C es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz A tiene rango 3, se tiene que

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim F - \operatorname{rango} A = 3 - 3 = 0$$

y f es inyectiva. Por lo tanto, por el apartado 1, la aplicación Φ define un producto escalar sobre F.

4. La matriz asociada al producto escalar de E respecto de la base canónica es $P_E = I$ (la matriz identidad). Obtenemos la matriz asociada al producto escalar de F respecto de la base B utilizando el resultado del apartado 2.

$$P_F = A^T P_E A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular una base ortogonal de F, utilizamos el método de Gram-Schmidt. Partimos de la base $B = \{1, t, t^2\}$.

Sean $q_0(t) = 1$ y $q_1(t) = t + \alpha q_0(t) = t + \alpha$ tal que $\Phi(q_0(t), q_1(t)) = 0$. Entonces, se cumple

$$0 = \Phi(q_0(t), q_1(t)) = \Phi(1, \alpha + t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_F \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\alpha + 2,$$

de modo que $\alpha = -1/3$ y $q_1(t) = t - 1/3$.

Sea ahora $q_2(t) = t^2 + \lambda_0 q_0(t) + \lambda_1 q_1(t)$tal que

$$\left.\begin{aligned} 0 = \Phi(q_0(t), q_2(t)) = \Phi(q_0(t), t^2) + \lambda_0 \Phi(q_0(t), q_0(t)) \\ 0 = \Phi(q_1(t), q_2(t)) = \Phi(q_1(t), t^2) + \lambda_1 \Phi(q_1(t), q_1(t)) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Puesto que

$$\Phi\left(q_0(t), t^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Phi(q_0(t), q_0(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\Phi\left(q_1(t), t^2\right) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

y

$$\Phi(q_1(t), q_1(t)) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_F \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4/3,$$

el sistema (1) se convierte en

$$\left.\begin{aligned} 0 = & \quad 0 + 6\lambda_0 \\ 0 = & \ -1 + \frac{4}{3}\lambda_1 \end{aligned}\right\}.$$

Por lo tanto, $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = \dfrac{3}{4}$, de modo que

$$q_2(t) = t^2 + \frac{3}{4}\left(t - \frac{1}{3}\right) = t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}.$$

La base ortogonal de F es

$$\left\{1, t - \frac{1}{3}, t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}\right\}.$$