X EDICIÓN PREMIOS JORGE JUAN
ESTADÍSTICA

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{\theta}|x-\eta|}, \quad x \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X.

(a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ, si η es conocido.

(b) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de η, si θ es conocido.

(c) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de (θ, η).

NOTAS:

1. El *estimador de máxima verosimilitud* de un parámetro desconocido λ respecto del cuál depende la distribución teórica poblacional, es el valor del parámetro $\hat{\lambda}$ que maximiza la función de verosimilitud de la muestra observada de la población. Para una distribución poblacional continua, *la función de verosimilitud* de la muestra observada es la función de densidad de la muestra vista como función del parámetro. La expresaremos $L(\lambda)$.

2. Para el apartado (b), expresar la función de verosimilitud respecto de η, en términos de la muestra ordenada $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, siendo

$$\begin{aligned}
x_{(1)} &= \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\
x_{(2)} &= \min\{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \setminus x_{(1)}\} \\
x_{(3)} &= \min\{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \setminus \{x_{(1)}, x_{(2)}\}\} \\
&\vdots \\
x_{(n)} &= \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.
\end{aligned}$$

Distinguir entre los casos $n = 2k$ y $n = 2k+1$.

3. Para el apartado (c), probar que $L(\theta, \eta)$, independientemente del valor de θ, puede maximizarse tomando $\eta = \hat{\eta}$, para cierto estadístico $\hat{\eta}$. A continuación, maximizar $L(\theta, \hat{\eta})$ respecto de θ.

SOLUCIÓN

(a) La función de verosimilitud del parámetro θ para cada muestra observada $(x_1,...,x_n)$ es:

$$L(\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|\right\},\quad \theta>0.$$

Maximizar esta función respecto del parámetro equivale a maximizar su logaritmo (neperiano):

$$\log L(\theta)=-n\log(2\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|,\quad \theta>0.$$

Como esta función es derivable respecto de θ, vamos a obtener un punto crítico:

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=-n\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|=0\Leftrightarrow\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|}{n}.$$

Comprobamos que se trata de un máximo a partir de la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)=\frac{n}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|\Rightarrow\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{n}{\hat{\theta}^2}-\frac{2n}{\hat{\theta}^2}<0.$$

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud de θ es $\boxed{\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\eta|}{n}}$

(b) La función de verosimilitud del parámetro η para cada muestra observada $(x_1,...,x_n)$ es:

$$L(\eta)=\frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|\right\},\quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Esta función no es derivable respecto de η, pero observamos que

$$\max_{\eta\in\mathbb{R}}L(\eta)\Leftrightarrow\min_{\eta\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|$$

Vamos a llamar $H(\eta):=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\eta|=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{(i)}-\eta\right|$, expresada en términos de la muestra ordenada.

Evidentemente, $H(\eta)$ dependerá de la posición de η respecto de la muestra ordenada.

Vamos a distinguir según n sea par o impar, pues ello afectará al resultado final.

CASO 1.- Si $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$.

- Si $\eta \le x_{(1)},\ H(\eta) = \sum_{i=1}^{2k}\left(x_{(i)} - \eta\right) = \sum_{i=1}^{2k} x_{(i)} - (2k)\eta$. Se trata de una recta de pendiente negativa igual a $-2k$.
- Si $x_{(1)} < \eta \le x_{(2)},\quad H(\eta) = \left(\eta - x_{(1)}\right) + \sum_{i=2}^{2k}\left(x_{(i)} - \eta\right) = \sum_{i=2}^{2k} x_{(i)} - x_{(1)} - 2(k-1)\eta$. Obtenemos de nuevo un recta de pendiente negativa igual a $-2(k-1) > -2k$.

Siguiendo este esquema, comprobamos que, siempre que $\eta \le x_{(k)}$, $H(\eta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente negativa, cuyo valor absoluto, que es un número par, va disminuyendo. Claramente, $H(\eta)$ es decreciente para $\eta \le x_{(k)}$.

- Si $x_{(k)} < \eta \le x_{(k+1)},\ H(\eta) = \sum_{i=1}^{k}\left(\eta - x_{(i)}\right) + \sum_{i=k+1}^{2k}\left(x_{(i)} - \eta\right) = \sum_{i=k+1}^{2k} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$, función constante en η.
- Si $x_{(k+1)} < \eta \le x_{(k+2)},\ H(\eta) = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\eta - x_{(i)}\right) + \sum_{i=k+2}^{2k}\left(x_{(i)} - \eta\right) = \sum_{i=k+2}^{2k} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{k+1} x_{(i)} + 2\eta$. Obtenemos en este caso una recta de pendiente positiva igual a 2.

Siguiendo este esquema, comprobamos que, siempre que $x_{(k+1)} < \eta \le x_{(2k)}$, $H(\eta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente positiva, cuyo valor (par) va aumentando.

- Si $\eta > x_{(2k)},\ H(\eta) = \sum_{i=1}^{2k}\left(\eta - x_{(i)}\right) = (2k)\eta - \sum_{i=1}^{2k} x_{(i)}$. Se trata de una recta de pendiente positiva igual a $2k$.

Claramente, $H(\eta)$ es creciente para $\eta > x_{(k+1)}$.

La conclusión es que, dado que $H(\eta)$ es una función continua en toda la recta real, alcanza su valor mínimo en cualquier punto del segmento $\left[x_{(k)}, x_{(k+1)}\right]$. Así, el estimador de máxima verosimilitud de η no es único: $\boxed{\hat{\eta}_\alpha = \alpha X_{(k)} + (1-\alpha) X_{(k+1)}, \quad 0 \le \alpha \le 1}$.

CASO 2.- Si $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Procedemos de una forma análoga al CASO 1, comprobando que, siempre que $\eta \le x_{(k+1)}$, $H(\eta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente negativa, cuyo valor absoluto, que es un número impar, va disminuyendo. Claramente, $H(\eta)$ es decreciente para $\eta \le x_{(k+1)}$.

A continuación, comprobamos que, siempre que $x_{(k+1)} < \eta$, $H(\eta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente positiva, cuyo valor (impar) va aumentando. Claramente, $H(\eta)$ es creciente para $\eta > x_{(k+1)}$.

La conclusión es que, dado que $H(\eta)$ es una función continua en toda la recta real, alcanza su valor mínimo en $x_{(k+1)}$. Así, el estimador de máxima verosimilitud de η es único: $\boxed{\hat{\eta} = X_{(k+1)}}$.

(c) La función de verosimilitud del parámetro (θ, η) para cada muestra observada $(x_1, ..., x_n)$ es:

$$L(\theta,\eta) = \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta|\right\}, \quad \theta > 0, \eta \in \mathbb{R}.$$

Hemos obtenido en el apartado (b) que $\min_{\eta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}_\alpha|, \ \forall \alpha \in [0,1], & \text{si } n \text{ es par}, \\ \sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}|, & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$

Si n es par, para todo $\alpha \in [0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta| \ge \sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}_\alpha|, \ \forall \eta \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta| \le -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}_\alpha|, \ \forall \eta \in \mathbb{R}, \forall \theta > 0$$
$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta|\right\} \le \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}_\alpha|\right\}, \ \forall \eta \in \mathbb{R}, \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \eta|\right\} \le \frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{\eta}_\alpha|\right\}, \ \forall \eta \in \mathbb{R}, \forall \theta > 0$$
$$\Rightarrow L(\theta,\eta) \le L(\theta,\hat{\eta}_\alpha), \forall \eta \in \mathbb{R}, \forall \theta > 0.$$

El máximo de $L\left(\theta,\hat{\eta}_{\alpha}\right)$ respecto de θ (lo hemos calculado en el apartado (a)) se alcanza en $\hat{\theta}_{\alpha}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\hat{\eta}_{\alpha}\right|}{n}$. Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud de (θ, η) no es único: $\left(\hat{\theta}_{\alpha},\hat{\eta}_{\alpha}\right)$, $\forall\alpha\in[0,1]$, donde $\boxed{\hat{\eta}_{\alpha}=\alpha X_{(k)}+(1-\alpha)X_{(k+1)} \text{ y } \hat{\theta}_{\alpha}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\hat{\eta}_{\alpha}\right|}{n}}$.

Si *n* es impar, mediante un razonamiento análogo al anterior, obtenemos que el estimador de máxima verosimilitud de (θ, η) es único: $\left(\hat{\theta},\hat{\eta}\right)$, donde $\boxed{\hat{\eta}=X_{(k+1)} \text{ y } \hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\hat{\eta}\right|}{n}}$.