IX Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Problema

Supongamos que $f(x)$ está definida y tiene derivadas continuas hasta el orden 4 en el intervalo $[a, b]$, que contiene el conjunto de puntos igualmente espaciados

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\}.$$

Son también conocidos los valores de f en los puntos anteriores:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3),$$

lo que permite calcular el polinomio interpolador de Lagrange, $p_3(x)$. Estamos interesados en acotar el error de interpolación en un punto cualquiera, $x \in [x_0, x_3]$.

1. Sea

   $$\Phi(z) = f(z) - p_3(z) - a(x)(z - x_0)(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3),$$

   donde $a(x)$ es una constante tal que Φ se anule en dicho punto, x. Aplique el teorema de Rolle cuatro veces para probar que existe un punto $\xi(x)$, tal que $\Phi^{(4)}(\xi(x)) = 0$.

2. A partir del apartado anterior, pruebe que la fórmula del error de interpolación del polinomio de Lagrange es:

   $$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

3. Siendo h la amplitud de los subintervalos que manejamos y

   $$|f^{(4)}(x)| \leq M_4, \ \text{ para } \ x_0 \leq x \leq x_3,$$

   pruebe que, en este último intervalo, es válida la siguiente cota para el error de interpolación del polinomio de Lagrange de grado 3:

   $$|E_3(x)| \leq \frac{h^4 M_4}{24}, \ \ x \in [x_0, x_3].$$

Solución.

- La función Φ se anula en los cinco puntos distintos $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x\}$. El teorema de Rolle permite asegurar la existencia de cuatro puntos, distintos de los anteriores, donde Φ' se anula. Aplicando de nuevo el teorema de Rolle, podemos asegurar la existencia de tres puntos donde Φ'' se anula. Repitiendo el razonamiento, llegaríamos a obtener un punto, $\xi(x)$, donde $\Phi^{(4)}(\xi(x)) = 0$.

- Dado que $\Phi^{(4)}(\xi(x)) = 0 = f^{(4)}(\xi(x)) - a(x)4!$ y $\Phi(x) = 0$, podemos escribir

$$0 = f(x) - p_3(x) - \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

de donde se deduce la fórmula del error en x,

$$E_3(x) = f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

- Para completar la prueba deberemos ver que $|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)| \leq h^4$, siendo $h = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, 3$.
Ahora bien, si tomamos

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_0 + x_3}{2} = x_0 + \frac{3h}{2},$$

el polinomio $p(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ puede escribirse como

$$p(x) = \left(x - z + \frac{3h}{2}\right)\left(x - z + \frac{h}{2}\right)\left(x - z - \frac{3h}{2}\right)\left(x - z - \frac{h}{2}\right).$$

Agrupando términos, se tiene

$$p(x) = \left[\left((x - z)^2 - \frac{h^2}{4}\right)\right]\left[\left((x - z)^2 - \frac{9h^2}{4}\right)\right].$$

Puede escribirse

$$p(x) = (x - z)^4 - \frac{10h^2}{4}(x - z)^2 + \frac{9h^4}{16}.$$

Derivando e igualando a 0, se tiene la ecuación

$$4(x - z)^3 - 5h^2(x - z) = 0,$$

de donde se obtienen las raíces

$$\begin{array}{l} x = z = x_0 + \dfrac{3h}{2} \\ x = z + \dfrac{\sqrt{5}}{2}h \\ x = z - \dfrac{\sqrt{5}}{2}h \end{array} .$$

Los valores de $p(x)$ en estas raíces son, respectivamente, $\dfrac{9h^4}{16}, -h^4, -h^4$, de donde se obtiene el resultado.