PREMIOS JORGE JUAN 2006 (SEGUNDO CICLO)

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Problema:

El Ayuntamiento de un pueblo turístico se plantea instalar chiringuitos en una playa virgen, que es perfectamente recta y tiene una longitud de 1 km. Se sabe que los bañistas se distribuyen sobre la playa de forma aleatoria (con distribución uniforme). Se supone que los bañistas harán sus consumiciones en el chiringuito más próximo, sin que el número de viajes diarios al mismo dependa de la distancia.

Supongamos que el Ayuntamiento autoriza un único chiringuito.

(a) ¿Dónde debería instalarse para minimizar el total de las distancias recorridas por los bañistas? ¿Cuál sería la distancia promedio recorrida por los bañistas?

Supongamos que el Ayuntamiento decide instalar un segundo chiringuito después de que el primero ya se instaló en el lugar decidido en (a).

(b) Si la ubicación es decidida por el segundo adjudicatario, ¿dónde lo instalaría? ¿Cuál sería el recorrido medio?

Supongamos ahora que el Ayuntamiento decide abrir dos chiringuitos al mismo tiempo.

(c) Si el Ayuntamiento decide instalarlos en los extremos de la playa, ¿cuantos kms recorrerán en promedio los bañistas para saciar su sed?

(d) Si el Ayuntamiento, con ánimo filantrópico, desea minimizar el total recorrido por el conjunto de los bañistas, ¿dónde deberán ubicarse los chiringuitos? ¿Cuánto esfuerzo ahorra esta decisión en comparación con la de (c)?

Nota. Se valorará el rigor de la argumentación.

SOLUCIÓN

Si la posición de un bañista en $[a,b]$ es $Z \sim U(a,b)$ y el chiringuito está en a, el recorrido promedio para servirse (ida y vuelta) es

$$E\left(2\left(Z-a\right)\right) = 2\int_a^b \left(\frac{z-a}{b-a}\right) dz = b-a.$$

La expresión es la misma si el chiringuito está en b. Por lo tanto, el recorrido medio de un bañista que se sirve en un extremo del intervalo es su longitud. Esta observación ayuda a expresar los objetivos en cada caso.

(a) Sea x la distancia del chiringuito a un extremo de la playa, por ejemplo, 0. El recorrido realizado por bañistas que están a izquierda es el promedio, x, por el número de bañistas allí ubicados, que es proporcional a la longitud de la playa a la izquierda de x, otra vez x. Análogamente, el recorrido realizado por los bañistas a la drecha es $(1-x)^2$. Por lo tanto, hay que minimizar $f(x) = x^2 + (1-x)^2$ sobre $[0,1]$. La solución óptima (única) es $\frac{1}{2}$, con recorridos medios de $\frac{1}{2}$ km, para ambos trozos de playa.

(b) Podemos suponer que el nuevo chiringuito se ubica en $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Sea x la distancia del 2^o chiringuito a 0. El número de viajes que recibirá es proporcional a $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$, por lo que se instalará también en el centro, sin ahorro de esfuerzo para los bañistas, que recorrerán un promedio de $\frac{1}{2}$ km.

De forma más sencilla: si el nuevo chiringuito se pone a un lado, se repartirá con el viejo chiringuito los bañistas situados de ese lado, mientras que le deja todos los situados del lado opuesto. Para eso es preferible situarse en el medio, con lo que se reparten a los bañistas a partes iguales. El recorrido promedio que harán es el mismo que en (a): $\frac{1}{2}$ km

(c) Basta ocuparse de los bañistas situados en $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, que recorren una media de $\frac{1}{2}$ km.

(d) Si x es la distancia del 1^o chiringuito a 0 (el extremo de la playa más próximo) y por y la distancia entre ambos chiringuitos, el recorrido total es proporcional a $f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + (1-x-y)^2$, cuyo mínimo sobre el poliedro descrito por el sistema $\{x+y \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ es $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, con $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ km (recorrido promedio). Los bañistas recorrerán la mitad de lo que deberían recorrer si los chiringuitos se instalaran en los dos extremos de la playa.

Comentario:

Es interesante observar la falta de coincidencia entre las soluciones óptimas del problema consiste en decidir la ubicación de dos chiringuitos, según cuál sea el decisor (el empresario o el Ayuntamiento filantrópico), según se ha visto en los apartados (b) y (d). Si deciden los empresarios, los bañistas caminarán el doble de lo necesario.

la conclusión es que no siempre se cumple la famosa ley de Adam Smith, base del liberalismo económico: el interés desregulado de los agentes económicos (es decir, *la mano invisible de la libre economía*) conduce al bien común de la sociedad.