IX PREMIOS JORGE JUAN

11 de noviembre de 2006

—

Geometría

Necesitamos construir una rampa helicoidal con las siguientes características:

- el radio interior es de 1 metro;
- el radio exterior es de 3 metros;
- en cada vuelta completa se suben 4π metros;
- en total, se describen 8 vueltas completas.

Se pide:

1. Parametriza dicha rampa.

   SOLUCIÓN: Una posible parametrización es la siguiente:

   $$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, 2\theta), \qquad 1 \leq u \leq 3, \qquad \theta \in [0, 16\pi].$$

   El factor 2 de la tercera componenete asegura que, cada vez que el ángulo θ cubra una vuelta completa, la altura se incremente en 4π metros. El rango de θ se corresponde con las ocho vueltas de la rampa, y el de u con los bordes.

2. Queremos pintar con una línea continua amarilla los dos bordes de la rampa, el interior y el exterior. Cada bote de pintura permite pintar 100 metros de línea continua. ¿Cuántos botes de pintura necesitaremos?.

   SOLUCIÓN: Observemos que los bordes interior y exterior de nuestra rampa son dos hélices de radios respectivos 1 y 3, así que podríamos parametrizarlos directamente y calcular sus longitudes. También podemos mirar esos bordes como curvas sobre la superficie. El borde interior, se corresponde con la imagen, mediante $\mathbb{X}$, de la línea coordenada $u = 1$, por tanto podemos parametrizarlo de la siguiente manera:

$$\alpha_{int}(t) = \mathbb{X}(1, t), \qquad 0 \leq t \leq 16\pi.$$

   Se tiene así

$$\dot{\alpha_{int}}(t) = \mathbb{X}_\theta(1, t).$$

   Teniendo en cuenta que $\mathbb{X}_\theta(u, \theta) = (-u \sin\theta, u\cos\theta, 2)$, y que

$$\mathbb{X}_\theta(u, \theta).\mathbb{X}_\theta(u, \theta) = 4 + u^2,$$

   obtenemos

$$||\dot{\alpha_{int}}(t)|| = \sqrt{\mathbb{X}_\theta(1, t).\mathbb{X}_\theta(1, t)} = \sqrt{4 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

   Finalmente,

$$\text{longitud de } \alpha_{int}(t) = \int_0^{16\pi} ||\dot{\alpha_{int}}(t)||dt = \int_0^{16\pi} \sqrt{5}dt = 16\sqrt{5}\pi \text{ m}.$$

   Utilizando el mismo argumento para $\alpha_{ext} = \mathbb{X}(3, t)$, la imagen de la línea coordenada $u = 3$, obtenemos que

$$\text{longitud de } \alpha_{ext}(t) = \int_0^{16\pi} ||\dot{\alpha_{ext}}(t)||dt = \int_0^{16\pi} \sqrt{13}dt = 16\sqrt{13}\pi \text{ m}.$$

   Sumando, obtenemos la longitud completa que queremos pintar:

$$16\pi(\sqrt{5} + \sqrt{13})\,\text{m}.$$

   Es decir, aproximadamente $293,63$ metros. Así que nos bastará con tres botes de pintura.

3. ¿Cuántos metros cuadrados de material usaremos para construirla? (puedes dejarlo expresado como una integral).

   SOLUCIÓN: Calculemos las derivadas parciales

$$\mathbb{X}_u(u,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{X}_\theta(u,\theta)) = (-u\sin\theta, u\cos\theta, 2).$$

   Los coeficientes de la primera forma fundamental, según la notación de Gauss, son los siguientes:

$$E(u,\theta) = \mathbb{X}_u(u,\theta).\mathbb{X}_u(u,\theta) = 1;$$
$$F(u,\theta) = \mathbb{X}_u(u,\theta).\mathbb{X}_\theta(u,\theta) = 0;$$
$$G(u,\theta) = \mathbb{X}_\theta(u,\theta).\mathbb{X}_\theta(u,\theta) = 4 + u^2.$$

   El área de nuestra rampa será entonces

$$A = \int_0^{16\pi} \int_1^3 ||\mathbb{X}_u(u,\theta) \times \mathbb{X}_\theta(u,\theta)||\, du\, d\theta =$$

$$\int_0^{16\pi} \int_1^3 \sqrt{E(u,\theta)G(u,\theta) - F^2(u,\theta)}\, du\, d\theta =$$

$$\int_0^{16\pi} \int_1^3 \sqrt{4+u^2}\, du\, d\theta = 16\pi \int_1^3 \sqrt{4+u^2}\, du \text{ m}^2.$$