VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO 1

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right].$

2. Calcula: $\displaystyle\sqrt[4]{527-\cfrac{1}{527-\cfrac{1}{527-\cfrac{1}{527-\dots}}}}$, expresando el resultado en la forma $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$, con a,b,c,d números enteros.

VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO 1

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Calcula:

a) $\int \frac{x^2 e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right].$

Soluciones:

a) Sea $J=\int \frac{x^2 e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ Entonces $J=\int \frac{x^2\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$ Considerando las integrales indefinidas $I_1=\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ e $I_2=\int \frac{x\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$, se llega por integración por partes en I_1 a que $I_1+I_2=\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}$. Y además, de nuevo por integración por partes en I_2, que $I_2=x\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}-I_1-2J$, de donde $J=\frac{x-1}{2}\sqrt{1+x^2}\,e^{\arctan x}+C.$

b) Hay varias formas de resolver este límite.

<u>Primera solución:</u>

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{n+n-2}+\frac{1}{n+n-1}-\frac{1}{n+n}.$$

Considerando ahora el desarrollo en serie potencias de x de la función $f(x)=\log(1+x)$,

Se tiene $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$ que es convergente en $(-1,1]$ y en particular es condicionalmente convergente en $x=1.$ Por tanto el límite de la suma pedida vale $\ln 2.$

<u>Segunda solución:</u> $H_n=1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\Leftrightarrow \log n+g+e_n$ cuando $n\to+\infty,$ siendo $g=0.57\ldots$, la constante de Euler y e_n un infinitésimo que tiende a cero si

$n \to +\infty.$ Entonces $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} = H_{2n} - H_n,$ es equivalente a $\log 2n - \log n + e_{2n} - e_n$ que tiende a $\log 2,$ cuando $n \to +\infty.$

Tercera solución:

Escribiendo $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}},$ se tiene por aplicación directa de la integral de Riemann a la función $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en $[0,1],$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x}\,dx = \log 2.$

2. Calcula: $\sqrt[4]{527 - \cfrac{1}{527 - \cfrac{1}{527 - \cfrac{1}{527 - \ldots}}}}$, expresando el resultado en la forma $\dfrac{a + b\sqrt{c}}{d},$ con a, b, c, d números enteros.

Solución:

Sea $j(n) = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{n - ..}}.$ Tenemos que calcular $\sqrt[4]{j(527)}.$

Observamos que $j(n) = n - \dfrac{1}{j(n)},$ lo que conduce a que $j(n) = \dfrac{n + \sqrt{n^2-4}}{2}$ ó $j(n) = \dfrac{n - \sqrt{n^2-4}}{2}.$ Esta segunda solución se deshecha pues,

$j(n) = \dfrac{n + \sqrt{n^2-4}}{2} = \dfrac{2}{n + \sqrt{n^2-4}} < \dfrac{2}{n} < 1 < j(n).$ Así $j(n) = \dfrac{n + \sqrt{n^2-4}}{2}.$

$$[j(n)]^2 = \frac{n^2 + 2n\sqrt{n^2-4} + n^2 - 4}{4} = \frac{n^2 - 4 + \sqrt{(n^2-4)^2 - 4}}{2} = j(n^2 - 2), \text{ para } n > 2.$$

Como $n > 2,$ se tiene que $n^2 - 2 > 2.$

Recíprocamente si $k > 2,$ haciendo $k = n^2 - 2,$ con $n = \sqrt{k+2} > 2,$ y por tanto $j(k) = [j(n)]^2,$ $\sqrt{j(k)} = j(n) = j\left(\sqrt{k+2}\right).$

Entonces $j(527) = j\left(23^2 - 2\right) = j(23)^2 = j\left(5^2 - 2\right)^2 = \left(j(5)^2\right)^2 = j(5)^4.$ Por tanto $\sqrt[4]{j(527)} = j(5) = \dfrac{5 + \sqrt{23}}{2}.$ Así $a = 5, b = 1, c = 23$ y $d = 2.$