VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Calcula $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(p\,x) - \arctan x}{x}\,dx$, utilizando convenientemente una integral doble o de otra forma.

2. En el plano R^2, sea S el conjunto de los puntos frontera e interiores de un polígono convexo dado. Sea $d(x,y)$ la mínima distancia del punto (x,y) al punto más cercano de S. Demuestra que existen constantes a, b y c independientes de S, tales que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-d(x,y)}\,dx\,dy = a + bL + cA$, siendo L y A respectivamente el perímetro y el área de S. Encuentra además, los valores de esas constantes a, b y c.

VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Calcula $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(p\,x) - \arctan x}{x}\,dx$, utilizando convenientemente una integral doble o de otra forma.

Primera solución:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(p\,x) - \arctan x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\arctan(tx)\Big|_1^p\,dx = \int_0^{+\infty}\int_1^p \frac{1}{1+(xt)^2}\,dt\,dx =$$

$$= \int_1^p\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(xt)^2}\,dx\,dt = \int_1^p \frac{1}{t}\frac{p}{2}\,dt = \frac{p}{2}\ln p\,.$$

La tercera igualdad es lícita por el teorema de cambio en el orden de integración en las integrales dobles (Fubini).

Segunda solución:

Sea $\displaystyle H(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(a\,x) - \arctan x}{x}\,dx$ con a parámetro real.

Entonces, $\displaystyle H'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{x}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\frac{p}{2}$. Por tanto $\displaystyle H(a) = \frac{p}{2}\ln a + C.$

Como $H(1) = 0, C = 0.$ De esta forma $\displaystyle H(p) = \frac{p}{2}\ln p\,.$

2. En el plano R^2, sea S el conjunto de los puntos frontera e interiores de un polígono convexo dado. Sea $d(x,y)$ la mínima distancia del punto (x,y) al punto más cercano de S. Demuestra que existen constantes a, b y c independientes de S, tales que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-d(x,y)}\,dx\,dy = a + bL + cA$, siendo L y A respectivamente el perímetro y el área de S. Encuentra además, los valores de esas constantes a, b y c.

Solución:

Denotaremos por $I(\Omega)$ a la integral doble $\iint_{\Omega} e^{-d(x,y)}\,dxdy$. Claramente $I(S) = \iint_{S} e^{-d(x,y)}\,dxdy = A$, porque $d(x,y) = 0$ para $(x,y) \in S$. Sean ahora s un lado cualesquiera de S, s la longitud de s y $B(s)$ la semi-banda del plano R^2, perpendicular a s, y exterior al polígono S, que consiste en los puntos del plano para los que un punto de s es el punto más cercano a S.
Cambiando a las coordenadas (u,v), con u medido paralelo a s y v medido perpendicular a s, se deduce fácilmente que $I(B(s)) = \int_0^{s}\int_0^{+\infty} e^{-v}\,dv\,du = s$. La suma Σ_1 de estas integrales para todos los lados de S es precisamente el perímetro L.
Si V es un vértice de S, los puntos del plano que tienen a V como punto más próximo están dentro del sector $A(V)$ de un ángulo acotado por los rayos desde V perpendiculares a los dos lados que se cortan en V; sea $a = a(V)$ la medida de este ángulo. Usando coordenadas polares $I(A(V)) = \int_0^{a(V)}\int_0^{+\infty} r\,e^{-r}\,dr\,dj = a$.
La suma Σ_2 de las integrales $I(A(V))$ para todos los vértices es obviamente $2p$.
Por tanto $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-d(x,y)}\,dx\,dy = \Sigma_1 + \Sigma_2 = 2p + L + A$. Así $a = 2p$, $b = c = 1$.