VII Premios Jorge Juan de La Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Problema

Sea f una función definida en $[a, b]$. Sean $\{x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ $n + 1$ valores reales distintos en el intervalo $[a, b]$.
Definimos a continuación las diferencias divididas de orden j, $0 \leq j \leq n$ de la función f:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \text{ y, por inducción,} \\ f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+j+1}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}]}{x_{i+j+1} - x_i}, \end{aligned}$$

siendo $i + j \leq n$.

El error de interpolación, cuando se utiliza la fórmula de Newton, involucra la definición de diferencia dividida y viene dado por

$$E = f[x_0, x_1, .., x_n, x](x - x_0)...(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

El problema que proponemos sirve como contraejemplo para probar que el aumento del grado del polinomio interpolador no lleva, necesariamente, a obtener mejores aproximaciones fuera de los nodos. Es más, la cota de error puede tender a ∞ cuando crece el grado, n, del polinomio interpolador.

- Pruebe que si $f(x) = \dfrac{1}{(x + c)}$, entonces

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=0}^{n} (x_j + c)}.$$

- Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos igualmente espaciados, en el intervalo $[-5, 5]$. Escribiendo

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right),$$

pruebe que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = f(x) \frac{(-1)^{r+1}}{\prod_{j=0}^{r} (x_j^2 + 1)} \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2r + 1; \\ x, & \text{si } n = 2r. \end{cases}$$

Solución.

Haremos ambas pruebas por inducción.
a) El caso $n = 1$.

$$f[x_0, x_1] = \frac{\dfrac{1}{(x_1+c)} - \dfrac{1}{(x_0+c)}}{x_1 - x_0} = (-1)^1 \frac{1}{\prod_{j=0}^{1}(x_j+c)}.$$

Admitamos el resultado para $n-1$:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = (-1)^{n-1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_j+c)}$$

y

$$f[x_1, \ldots, x_n] = (-1)^{n-1} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(x_j+c)}.$$

Así, pues,

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \frac{(-1)^{n-1} \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}(x_j+c)} - (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_j+c)}}{x_n - x_0} = (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=0}^{n}(x_j+c)}.$$

b) Si

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

aplicando el resultado del apartado anterior, podemos escribir:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2i}\left[\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x_j - i)(x - i)} - \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x_j + i)(x + i)}\right]$$

$$= f(x)\frac{(-1)^{n+1}}{2i}\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x_j^2 + 1)}\left[\prod_{j=0}^{n}(x_j + i)(x + i) - \prod_{j=0}^{n}(x_j - i)(x - i)\right].$$

El resultado se obtiene cambiando en ambos productos x_0 por $-x_n$, x_1 por $-x_{n-1}$,..., y considerando por separado los casos $n = 2r + 1$ y $n = 2r$.

n par Si $n = 2r$, tenemos un número impar de términos, y el central es $x_r = 0$. Por lo que respecta a los demás, se verifica $x_{r-j} = -x_{r+j},\ j = 1, 2, \ldots, r$. Así, pués,

$$\prod_{j=0}^{r}(x_j + i) = i(-1)^r \prod_{j=r+1}^{n}(x_{j+r} - i)$$

y

$$\prod_{j=0}^{r}(x_j - i) = -i(-1)^r \prod_{j=r+1}^{n}(x_{j+r} + i)$$

Con lo cual,

$$\prod_{j=0}^{n}(x_j + i)(x + i) - \prod_{j=0}^{n}(x_j - i)(x - i)$$

$$= i(-1)^r \prod_{j=r+1}^{n}(x_{j+r}^2 + 1)[(x+i)+(x-i)] = 2ix(-1)^r \prod_{j=r+1}^{n}(x_{j+r}^2 + 1)$$

El resultado sigue al tener en cuenta que

$$(-1)^{n+1}(-1)^r = (-1)^{2r+1+r} = (-1)^{2r}(-1)^{r+1} = (-1)^{r+1}.$$

n impar En este caso $n = 2r + 1$, no hay término central, tenemos un númeo par de términos y es válida la relación $x_j = -x_{n-j},\ j = 0, 2, \ldots, r$. Tendremos

$$\prod_{j=0}^{r}(x_j + i) = (-1)^{r+1} \prod_{j=r+1}^{n}(x_{j+r} - i)$$

y

$$\prod_{j=0}^{r}(x_j - i) = (-1)^{r+1} \prod_{j=r+1}^{n} (x_{j+r} + i)$$

Como antes, obtenemos

$$\prod_{j=0}^{n}(x_j + i)(x + i) - \prod_{j=0}^{n}(x_j - i)(x - i)$$

$$= (-1)^{r+1} \prod_{j=r+1}^{n} (x_{j+r}^2 + 1)[(x+i)-(x-i)] = 2i(-1)^{r+1} \prod_{j=r+1}^{n} (x_{j+r}^2 + 1).$$

Teniendo en cuenta que

$$(-1)^{n+1}(-1)^{r+1} = (-1)^{2r+1+1+r+1} = (-1)^{2r+2}(-1)^{r+1} = (-1)^{r+1},$$

se obtiene el resultado deseado.