PREMIOS JORGE JUAN 2004
(SEGUNDO CICLO)

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Problema:

(a) Pruebe que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua sobre el conjunto cerrado y no acotado $X \subset \mathbb{R}^n$ y satisface $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, entonces f alcanza su valor mínimo en algún punto de X.

(b) Las regiones

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0 \right\}$$

y

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 - 3x_1 + 2 \leq 0 \right\},$$

que están separadas por un estrecho, están conectadas mediante un transbordador que une los puntos $(0'26, 2'0676) \in A$ y $(1'24, 0'1824) \in B$. Con la finalidad de minimizar los costes operativos, que son función creciente de la distancia recorrida, se desea saber si deben mantenerse o cambiarse los puntos de atraque (debe justificar la respuesta).

Ayuda:

Las únicas soluciones reales de las ecuaciones $8x^3 + 11x - 3 = 0$ y $16x^3 - 72x^2 + 130x - 81 = 0$ son $1'24$ y $0'26$, respectivamente.

Sugerencia:

(b) Construya un modelo de optimización sin restricciones, con dos variables de decisión, cuyos mínimos globales proporcionen pares de puntos más próximos en ambas orillas. Pruebe que dicho modelo tiene mínimo global y elabore una lista de candidatos.

Solución:

(a) Se dan tres soluciones, las dos prineras propuestas por sendos alumnos mientras que la tercera fue sugerida.

Sol. 1: Sea $x^0 \in X$ arbitrario, y sea $y_0 = f\left(x^0\right)$. Sea $\rho > 0$ tal que $f(x) > y_0$ $\forall x \in B(0_n; \rho)$. Evidentemente, x^0 domina a los puntos de $X \diagdown \operatorname{cl} B(0_n; \rho)$

Sea $\overline{x} \in X \cap \operatorname{cl} B(0_n; \rho)$ (compacto no vacío) tal que $f(\overline{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in X \cap \operatorname{cl} B(0_n; \rho)$.

En particular, $f(\overline{x}) \leq f\left(x^0\right)$ al ser $x^0 \in X \cap \operatorname{cl} B(0_n; \rho)$. Entonces $\overline{x}$es mínimo global de f sobre X.

Sol. 2: Sea $X_r := X \cap \operatorname{cl} B(0_n; r)$. Obviamente, $X_r \neq \emptyset$ (compacto) para r suficientemente grande, e.g., $r \geq r_0$. Sea $x^r \in X_r$ tal que $f(x^r) \leq f(x)$ $\forall x \in X_r$. Como $X_r \subset X_{r+1}$, $f\left(x^{r+1}\right) \leq f(x^r)$, i.e., $\{f(x^r)\}$ es no creciente. Si $\{\|x^r\|\}$ es no acotada, existe subsucesión $\{x^{r_k}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|x^{r_k}\| = +\infty$ y $\lim_{r\to\infty} f(x^{r_k}) \neq +\infty$ contra la hipótesis. En consecuencia, $\{x^r\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada.

Sea $\{x^{r_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente y sea $\lim_{k\to\infty} x^{r_k} = \overline{x} \in X$ (conjunto cerrado). Por continuidad de f en $\overline{x}$,

$$f(\overline{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x^{r_k}) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Sol. 3: Sea $\{x^r\}_{r=1}^{\infty}$, contenida en X, tal que

$$\lim_{r\to\infty} f(x^r) = \inf\{f(x) \mid x \in X\} < +\infty$$

(existen tales sucesiones). Si $\{x^r\}_{r=1}^{\infty}$ no es acotado, existe una subsucesión, $\{x^{r_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|x^{r_k}\| = +\infty$. Entonces $\lim_{k\to\infty} f(x^{r_k}) = +\infty$, lo cual es imposible. Se acaba como en Sol. 2.

(b) Se dan dos soluciones, la primera -analítica- siguiendo la sugerencia mientras que la segunda -geométrica- fue propuesta por un alumno.

Sol. 1: Los puntos de frontera de A y de B son de la forma $\left(z, z^2 + 2\right)$ y $\left(x, -x^2 + 3x - 2\right)$, respectivamente, por lo que el problema consiste en minimizar la distancia entre tales puntos o, equivalentemente, su cuadrado:

$$\text{Min } f(x, z) = (z - x)^2 + \left(z^2 + x^2 - 3x + 4\right)^2.$$

Los candidatos a solución óptima son las soluciones del sistema

$$\{\nabla f(x, z) = (0, 0)\}$$

(condición necesaria de primer orden). Como la única solución del mismo es (salvo error de aproximación) $(\overline{x}, \overline{z}) = (1'24, 0'26)$, tan sólo este punto puede minimizar f sobre el conjunto cerrado y no acotado $X = \mathbb{R}^2$.

La existencia de mínimo global para f sobre $\mathbb{R}^2$ es consecuencia de (a). Para probarlo, bastará demostrar que

$$\lim_{\|(x,z)\|\to\infty} f(x, z) = +\infty.$$

En efecto,

$$f(x,z) \geq \left(z^2+x^2-3x+4\right)^2 = \left[z^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]^2 \geq \left[z^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]^2.$$

Como

$$\left\|(x,z)-\left(\frac{3}{2},0\right)\right\| \geq \|(x,z)\| - \left\|\left(\frac{3}{2},0\right)\right\| = \|(x,z)\| - \frac{3}{2},$$

se tiene

$$f(x,z) \geq \left(\|(x,z)\| - \frac{3}{2}\right)^4 \to +\infty$$

cuando $\|(x,z)\| \to \infty$.

La conclusión es que hay que mantener los puntos de atraque.

Sol. 2: Es fácil probar que si $a \in A$ y $b \in B$, con $A, B \subset \mathbb{R}^n$, y se cumple $c'(x-a) \geq 0\ \forall x \in A$ y $c'(y-b) \leq 0\ \forall y \in B$ para el vector $c = a - b$, entonces $d(A,B) = d(a,b)$.

En efecto, según las hipótesis, dados $x \in A$ e $y \in B$, tenemos

$$c'[(x-a)-(y-b)] \geq 0,$$

es decir, $c'(x-y) \geq \|c\|^2$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\|c\|^2 \leq |c'(x-y)| \leq \|c\|\,\|x-y\|$$

y, como podemos suponer $c \neq 0_n$, tenemos

$$\|c\| = \|a-b\| \leq \|x-y\|.$$

Aquí $n = 2$ y basta probar que las tangentes en a y b son paralelas y ortogonales al vector c.

La ventaja de este enfoque geométrico es que proporciona la solución óptima sin recurrir a la proposición del apartado (a).