VII PREMIO JORGE JUAN

05/11/04

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Sean $u = u(x, y, z, t)$ **y** $v = v(x, y, z, t)$ **dos funciones implícitas de las variables independientes** x, y, z, t **definidas implícitamente por el sistema** $\begin{cases} u = z + x\varphi(u,v) \\ v = t + y\psi(u,v) \end{cases}$**,**
siendo $\varphi, \psi \in C^1(A)$ **dos funciones dadas y** $A \subset R^2$ **abierto no vacío.**
Si $f \in C^1(A)$ **es una función arbitraria, demostrar con rigor y claridad que:**

$$f_x = \varphi\, f_z \quad \text{y} \quad f_y = \psi\, f_t .$$

VII PREMIO JORGE JUAN

05/11/04

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Sean $u=u(x,y,z,t)$ **y** $v=v(x,y,z,t)$ **dos funciones implícitas de las variables independientes** x,y,z,t **definidas implícitamente por el sistema** $\begin{cases} u=z+x\varphi(u,v) \\ v=t+y\psi(u,v) \end{cases}$**,**
siendo $\varphi,\psi\in C^1(A)$ **dos funciones dadas y** $A\subset R^2$ **abierto no vacío.**
Si $f\in C^1(A)$ **es una función arbitraria, demostrar con rigor y claridad que:**

$$f_x=\varphi\, f_z \ \textbf{ y } \ f_y=\psi\, f_t.$$

SOLUCIÓN:

Sean $F(x,y,z,t,u,v)=z+x\varphi(u,v)-u$ y $G(x,y,z,t,u,v)=t+y\psi(u,v)-v.$
El sistema dado (*) $\begin{cases} u=z+x\varphi(u,v) \\ v=t+y\psi(u,v) \end{cases}$**,** se escribe como $\begin{cases} F(x,y,z,t,u,v)=0 \\ G(x,y,z,t,u,v)=0 \end{cases}$, siendo F y G de clase uno en un cierto abierto no vacío de $\mathbb{R}^4$. (1)
El jacobiano

$$J\begin{pmatrix} F & G \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x\varphi_u-1 & x\varphi_v \\ y\psi_u & y\psi_v-1 \end{vmatrix}=(x\varphi_u-1)(y\psi_v-1)-xy\varphi_v\psi_u\neq 0. \quad (2)$$

Las condiciones (1) y (2) las verifica el sistema (*) porque define las dos funciones implícitas $u=u(x,y,z,t)$ y $v=v(x,y,z,t)$.

f es una función de u y v, que a su vez son funciones implícitas de las variables independientes x,y,z,t. Entonces: $\begin{cases} f_x=f_uu_x+f_vv_x \\ f_y=f_uu_y+f_vv_y \\ f_z=f_uu_z+f_vv_z \\ f_t=f_uu_t+f_vv_t \end{cases}$.

Probar que,

$$f_x=\varphi f_z \Leftrightarrow f_uu_x+f_vv_x=f_u\varphi u_z+f_v\varphi v_z \Leftrightarrow f_u(u_x-\varphi u_z)+f_v(v_x-\varphi v_z)=0.$$

Basta demostrar que $u_x-\varphi u_z=0$ y $v_x-\varphi v_z=0$ (I)
Análogamente probar que $f_y=\psi f_t \Leftrightarrow f_u(u_y-\psi u_t)+f_v(v_y-\psi v_t)=0.$
Basta por tanto demostrar que $u_y-\psi u_t=0$ y $v_y-\psi v_t=0$ (II)

Diferenciando el sistema (*) $\begin{cases} u = z + x\varphi(u,v) \\ v = t + y\psi(u,v) \end{cases}$ se obtiene:

$$\begin{cases} du = dz + \varphi dx + x\varphi_u du + x\varphi_v dv \\ dv = dt + \psi dy + y\psi_u du + y\psi_v dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x\varphi_u)du - x\varphi_v dv = \varphi dx + dz \\ -y\psi_u du + (1 - y\psi_v)dv = \psi dy + dt \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema por Cramer en du y dv y haciendo notar que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - x\varphi_u & -x\varphi_v \\ -y\psi_u & 1 - y\psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \text{ se deduce que}$$

$$du = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \varphi dx + dz & -x\varphi_v \\ \psi dy + dt & 1 - y\psi_v \end{vmatrix} \text{ y } du = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 - x\varphi_u & \varphi dx + dz \\ -y\psi_u & \psi dy + dt \end{vmatrix}. \text{ Entonces:}$$

$$du = \frac{1}{\Delta}[(1 - y\psi_v)\varphi dx + x\varphi_v \psi dy + (1 - y\psi_v)dz + x\varphi_v dt] \quad \text{y}$$

$$dv = \frac{1}{\Delta}[y\psi_u \varphi dx + (1 - x\varphi_u)\psi dy + y\psi_u dz + (1 - x\varphi_u)dt].$$

Por tanto $u_x = \frac{1}{\Delta}(1 - y\psi_v)\varphi$, $u_z = \frac{1}{\Delta}(1 - y\psi_v)$, lo que implica que $u_x = \varphi u_z$. (i)

$v_x = \frac{1}{\Delta} y\psi_u \varphi$, $v_z = \frac{1}{\Delta} y\psi_u$, lo que implica que $v_x = \varphi v_z$. (ii)

(i) y (ii) son precisamente (I).

Similarmente $u_y = \frac{1}{\Delta} x\varphi_v \psi$, $u_t = \frac{1}{\Delta} x\varphi_v$, lo que implica que $u_y = \psi u_t$. (iii)

$v_y = \frac{1}{\Delta}(1 - x\varphi_u)\psi$, $v_t = \frac{1}{\Delta}(1 - x\varphi_u)$, lo que implica que $v_y = \psi v_z$. (iv)

(iii) y (iv) son (II).