V EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 02/03

PROBABILIDAD

Reza un viejo proverbio chino que “a quien madruga Dios le ayuda” pero como esto es complicado de contrastar científicamente, nos quedaremos con la versión más creíble de que “a quién madruga le entra sueño después de comer”. Consideramos una población cuyos indivíduos se levantan a una hora que sigue una distribución uniforme entre las 6 y las 10 horas e independientes entre si. Si el grado de lucidez de un individuo después de la comida se mide mediante un índice que también sigue una distribución uniforme entre la hora a la que se levantó y 10, calcular la probabilidad de que el grado de lucidez tras la comida de dicho individuo sea:

a) Inferior a 9, si se levantó a las 7.
b) Inferior a 9, si se levantó después de las 7.
c) Inferior a 9.
d) ¿Cuántos individuos con un grado de lucidez tras la comida igual a 9 debemos seleccionar como mínimo en una muestra para que la probabilidad de que todos ellos se haya levantado después de las siete sea menor que 0.05?

RESOLUCION

En primer lugar definimos las variables aleatorias que se van a utilizar en la resolución de todo el ejercicio y calculamos las funciones de densidad que en cada apartado se van a utilizar:

X	= “hora a la que se levanta un individuo”	X ~ Un (6 , 10)
Y|X	= “grado de lucidez después de comer”	Y|X ~ Un (X , 10)

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad 6 \le x \le 10$$

$$f(y\,|\,x) = \frac{1}{10-x} \quad x \le y \le 10$$

$$f(x,y) = f(y\,|\,x)f(x) = \frac{1}{4(10-x)} \quad 6 \le x \le y \le 10$$

$$f(y) = \int_{R_X} f(x,y)dx = \int_6^y \frac{1}{4(10-x)}dx = \frac{1}{4}\left(-Ln(10-x)\Big|_6^y\right) = \frac{1}{4}\big(Ln4 - Ln(10-y)\big) \quad 6 \le y \le 10$$

$$f(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{4(10-x)}}{\frac{1}{4}\big(Ln4 - Ln(10-y)\big)} = \frac{1}{(10-x)\big(Ln4 - Ln(10-y)\big)} \quad 6 \le x \le y$$

a) $P\big(Y \le 9\,|\,X = 7\big) = \int_7^9 f(y\,|\,7)dy = \int_7^9 \frac{1}{3}dy = \frac{2}{3}$

b) $P\left(Y \le 9 \mid X \ge 7\right) = \dfrac{P\left(X \ge 7, Y \le 9\right)}{P\left(X \ge 7\right)} \quad = \quad \ldots$

$$P\left(X \ge 7\right) = \int_7^{10} f(x)dx = \int_7^{10} \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}$$

$$P\left(X \ge 7, Y \le 9\right) = \int_7^9 \int_7^y f(x,y)dxdy = \int_7^9 \int_7^y \frac{1}{4(10-x)}dxdy = \int_7^9 -\frac{1}{4}Ln(10-x)\Big|_7^y dy =$$

$$= \int_7^9 \frac{1}{4}\left(Ln3 - Ln(10-y)\right)dy = \int_7^9 \frac{1}{4}Ln3dy - \int_7^9 \frac{1}{4}Ln(10-y)dy = \frac{2}{4}Ln3 - \frac{1}{4}\Big(-(10-y)Ln(10-y) - y\Big)\Big|_7^9 =$$

$$= \frac{1}{2}Ln3 - \frac{1}{4}\left(-9 + 3Ln3 + 7\right) = \frac{1}{2}Ln3 - \frac{1}{4}\left(3Ln3 - 2\right) = \frac{1}{2}Ln3 - \frac{3}{4}Ln3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}Ln3$$

$$\ldots \quad = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}Ln3}{\frac{3}{4}} = \frac{2 - Ln3}{3} = 0.3005$$

c) $P\left(Y \le 9\right) = \displaystyle\int_6^9 f(y)dy = \int_6^9 \frac{1}{4}\left(Ln4 - Ln(10-y)\right)dy = \int_6^9 \frac{1}{4}Ln4dy - \int_6^9 \frac{1}{4}Ln(10-y)dy =$

$$= \frac{3}{4}Ln4 - \frac{1}{4}\Big(-(10-y)Ln(10-y) - y\Big)\Big|_6^9 = \frac{3}{4}Ln4 - \frac{1}{4}(-9 + 4Ln4 + 6) = \frac{3 - Ln4}{4} = 0.4034$$

d) $P\left(X \ge 7 \mid Y = 9\right) = \displaystyle\int_7^9 f(x \mid 9)dx = \int_7^9 \frac{1}{(10-x)Ln4}dx = \frac{1}{Ln4}\left(-Ln(10-x)\right)\Big|_7^9 = \frac{Ln3}{Ln4} = 0.7925$

Y = "nº de individuos con grado de lucidez igual a 9 que se levantaron después de las 7"
Y ~ Bn (n , 0.7925)

$$P\left(Y = n\right) = 0.7925^n \le 0.05 \quad \Rightarrow \quad n \ge \frac{Ln0.05}{Ln0.7925} = 12.88 \quad \Rightarrow \quad n = 13$$