CUARTO PREMIO JORGE JUAN
Teoría Elemental de Números

Alicante, a 17 de octubre de 2001

1. Probar que en la representación decimal del número $n = 5 \cdot 7^{34}$, aparece al menos cuatro veces un mismo dígito.

2. La función aritmética $t(n)$ indica el número de divisores positivos de n y la función de Möbius $m(n)$ se define del siguiente modo:
Si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ con $1 < p_1 < p_2 < ... < p_k$ siendo $p_1, p_2, ... p_k$ primos y $a_1, a_2, ..., a_k$ números enteros no negativos entonces,

$$m(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & si \ a_i > 1 \ \ para\ un\ i : 1, 2, ..., k. \\ (-1)^k & si \ \ n = p_1 p_2 ... p_k \end{cases}$$

(Por ejemplo $m(p) = -1$ si p es primo, $m(12) = m(2^2 \cdot 3) = 0$, $m(30) = m(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3 = -1$.)

Demostrar que $t(n) + m^2(n) = t(n^2)$ si y sólo si n es un número primo.