**IV PREMIOS JORGE JUAN**
**MÉTODOS NUMÉRICOS**

**PROBLEMA 0.1** a) Aplicar la fórmula de Newton para hallar la raíz cuadrada de un número $A > 0$.

b) El método resulta mucho más preciso si el número $A$ no es muy grande. Es por esto que los algoritmos para el cálculo de raices empiezan por expresar el número dado en la forma

$$A = q2^{2m}, \ \frac{1}{4} \leq q < 1. \tag{0.1}$$

De esta forma,

$$A^{1/2} = q^{1/2}2^m.$$

Pruébese que, cualquiera que sea $A$, siempre puede escribirse en la forma .

Ayuda: Es conveniente considerar dos casos:

a) $A$ es una potencia de 2.

b) $A$ está comprendido entre dos potencias consecutivas de 2.

En ambos casos se distinguirá, a su vez, si el exponente es par o impar.

**PROBLEMA 0.2** Supongamos que $f$ es derivable y que $f'$ veri  ca

$$0 < m \leq f'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Pruébese que $f(x) = 0$ tiene una única raíz situada entre $f(0)$ y $\dfrac{-f(0)}{m}$.

(Deben distinguirse los casos $f(0) > 0 \, (= 0, < 0)$, aunque, en realidad, uno de ellos es trivial y los otros dos se razonan de la misma forma)

b) Sabemos que si $g$ veri  ca $\exists L$, $0 < L < 1/ \ |g'(x)| \leq L$, $g$ admite un único punto  jo al que se puede acceder desde cualquier punto inicial, $x^0$, mediante la recurrencia

$$x^{n+1} = g(x^n).$$

Utilícese la información anterior para probar que si $f$ veri  ca

$$0 < m \leq f'(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

y consideramos el método iterativo

$$x^{n+1} = x^n - \lambda f(x^n), \ \ 0 < \lambda < \frac{2}{M},$$

alcanzaremos la única raíz de $f$, iniciando la iteración en cualquier punto $x^0$.