IV PREMIOS JORGE JUAN
MÉTODOS NUMÉRICOS

PROBLEMA 0.1 a) Aplicar la fórmula de Newton para hallar la raíz cuadrada de un número $A > 0$.

b) El método resulta mucho más preciso si el número A no es muy grande. Es por esto que los algoritmos para el cálculo de raices empiezan por expresar el número dado en la forma

$$A = q2^{2m}, \ \frac{1}{4} \leq q < 1. \tag{0.1}$$

De esta forma,

$$A^{1/2} = q^{1/2}2^m.$$

Pruébese que, cualquiera que sea A, siempre puede escribirse en la forma .

Ayuda: Es conveniente considerar dos casos:

a) A es una potencia de 2.

b) A está comprendido entre dos potencias consecutivas de 2.

En ambos casos se distinguirá, a su vez, si el exponente es par o impar.

PROBLEMA 0.2 Supongamos que f es derivable y que f' veri ca

$$0 < m \leq f'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Pruébese que $f(x) = 0$ tiene una única raíz situada entre $f(0)$ y $\dfrac{-f(0)}{m}$.

(Deben distinguirse los casos $f(0) > 0\,(= 0, < 0)$, aunque, en realidad, uno de ellos es trivial y los otros dos se razonan de la misma forma)

b) Sabemos que si g veri ca $\exists L$, $0 < L < 1/ \ |g'(x)| \leq L$, g admite un único punto jo al que se puede acceder desde cualquier punto inicial, x^0, mediante la recurrencia

$$x^{n+1} = g(x^n).$$

Utilícese la información anterior para probar que si f veri ca

$$0 < m \leq f'(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

y consideramos el método iterativo

$$x^{n+1} = x^n - \lambda f(x^n), \ \ 0 < \lambda < \frac{2}{M},$$

alcanzaremos la única raíz de f, iniciando la iteración en cualquier punto x^0.