IV PREMIOS JORGE JUAN 2001

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Denotemos por $\mathcal{X}$ la familia de conjuntos cerrados del plano, X , tales que

$$\sup\{\|x-y\| \mid x \in X, y \in X\} < \infty$$

y cuya frontera es una curva suave de longitud $L > 0$ que no contiene segmentos. Se pide:

(a) Demostrar que, para todo $X \in \mathcal{X}$ existen dos elementos $\overline{x}$ e $\overline{y}$ en la frontera de X tales que $\|\overline{x}-\overline{y}\| = \sup\{\|x-y\| \mid x \in X, y \in X\}$ (decimos entonces que $[\overline{x}, \overline{y}]$ es un diámetro de X).

(b) Proponer un modelo cuya solución permita encontrar el conjunto $Z \in \mathcal{X}$ que encierra mayor área, especificando las hipótesis (se sugiere utilizar (a)).

(c) Proponer un modelo de programación matemática que permita aproximar la solución, Z, del problema isoperimétrico del apartado (b).

(d) Justificar la convexidad del conjunto Z.

(e) Justificar la existencia de dos puntos en la frontera de Z, $\overline{x}$ e $\overline{y}$, que la dividen en dos curvas de igual longitud y probar que la recta determinada por $\overline{x}$ e $\overline{y}$ divide a Z en dos regiones que tienen igual área.

(f) Razonar la clase de conjunto que es Z. Se sugiere utiizar (e) y observar que el triángulo de mayor área que puede construirse con dos lados fijos es el triángulo rectángulo que tiene a tales lados por catetos.

NOTA: Cuando se uticen argumentos intuitivos, debe señalarse expresamente.

Solución:

(a) La condición $\sup \{\|x-y\| \mid x \in X, y \in X\} < \infty$ equivale a la acotación de X. Por lo tanto, los elementos de $\mathcal{X}$ son compactos. Si $X \in \mathcal{X}$, $X \times X$ es compacto y $f(x,y) = \|x-y\|$ es continua sobre él, por lo que alcanza su máximo en el par $(\overline{x}, \overline{y})$ del enunciado.

(b) Tomando un sistema de referencia en el plano tal que el eje de abscisas contenga a un diámetro, cuyos extremos podemos escribir como $(a,0)$ y $(b,0)$, $a < b$, X está contenido en la banda limitada por las rectas $x = a$ e $x = b$, siendo soluciones dominadas aquellos conjuntos X tales que las rectas $x = c$, con $a < c < b$, cortan a la frontera de X en más de dos puntos. Podemos considerar, pues, conjuntos de la forma

$$X = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones reales sobre $[a,b]$ continuamente diferenciables por la hipótesis de suavidad de la frontera de X, que es la unión de las correspondientes gráficas. Tomaremos tales funciones como incógnitas, es decir,

$$y_1(x) = \min \{y \mid (x,y) \in X\}, a \leq x \leq b,$$

e

$$y_2(x) = \max \{y \mid (x,y) \in X\}, a \leq x \leq b,$$

con lo que el modelo a resolver es

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Max} & \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx \\ & \text{s.a} & y_1(a) = y_2(a) = y_1(b) = y_2(b) = 0 \\ & & y_1(x) \leq y_2(x), x \in [a,b] \\ & & \int_a^b \left\{ \sqrt{1 + [y_1'(x)]^2} + \sqrt{1 + [y_2'(x)]^2} \right\} dx = L \\ & & y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,b]). \end{array}$$

Si la solución óptima de (P) es $(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$, entonces

$$Z = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \overline{y}_1(x) \leq y \leq \overline{y}_2(x)\}.$$

Hay que señalar que no se ha probado que (P) tenga solución óptima, ni que ésta sea única. Supondremos que es así.

(c) Sean $n \in \mathbb{N}$, $\Delta = \frac{b-a}{n}$ y $t_k = a + (k-1)\Delta$, $k = 1, ..., n+1$ (partición de $[a,b]$ en n subintervalos iguales). Sean $u_k = y_1(t_k)$ y $v_k = y_2(t_k)$, $k = 1, ..., n+1$, las incógnitas del problema aproximante, en el que las integrales se sustituyen por sumas de Riemann correspondientes a los extremos inferiores de los subintervalos (la elección es libre):

$$
\begin{array}{lll}
(P_A) & \text{Max} & \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - u_k) \\
& \text{s.a} & u_1 = v_1 = u_{n+1} = v_{n+1} = 0 \\
& & u_k \leq v_k, k = 1, ..., n+1 \\
& & \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta} \right)^2} \right\} = L. \\
& & u_k, v_k \in \mathbb{R}, k = 1, ..., n+1.
\end{array}
$$

(d) Si Z contiene dos puntos, x e y, tales que $[x, y] \nsubseteq Z$, entonces es fácil obtener un conjunto del mismo perímetro que Z pero de mayor área (sustituyendo los arcos cóncavos por sus simétricos). El argumento es intuitivo.

(e) Se toma un punto fijo en la frontera, $\overline{y}$, y otro, variable, x, que se desplaza sobre la frontera en el sentido positivo (por ejemplo) a partir de $\overline{y}$. La longitud del arco de frontera entre $\overline{y}$ y x es una función continua, $f(x)$, que toma valores entre 0 (al salir de y) y L (al llegar a y), debiendo existir un punto $\overline{x}$, de la frontera de Z, tal que $f(\overline{x}) = \frac{L}{2}$. La clave del argumento es la continuidad de $f(x)$, que aceptamos intuitivamente.

Si una de las dos regiones en que la recta determinada por $\overline{x}$ e $\overline{y}$ es más extensa que la otra, por simetría se logra una figura con el mismo perímetro que Z pero de área mayor.

(f) Se trata de probar que las dos curvas de longitud $\frac{L}{2}$ en que el segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$, del apartado (e), divide a la frontera de Z son semicircunferencias (por lo que Z es un círculo). Se argumenta por reducción al absurdo, suponiendo que desde un punto de tales arcos se ve $[\overline{x}, \overline{y}]$ bajo un ángulo diferente a 90^oy probando que, en tal caso, hay una figura de igual perímetro, L, pero de mayor área que Z.