IV EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 00/01

COMBINATORIA

A una fiesta acuden 30 matrimonios y como es usual en todo tipo de celebraciones después de la cena llega el momento del baile. Como no todos están dispuestos a exhibir sus habilidades en la danza, el maestro de ceremonias decide elegir al azar los individuos que deben salir a bailar sin tener la precaución de tener en cuenta los sexos a la hora de seleccionarlos para que las parejas de baile fuesen, por decirlo de algún modo “complementarias”. Si se seleccionan 20 individuos para abrir el baile;

a) ¿Cuál es la probabilidad de que entre ellos no haya ningún matrimonio?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 matrimonios?
c) ¿Cuál es el número más probable de matrimonios que encontraremos en la pista? ¿Cuánto vale dicha probabilidad?
d) Si en la fiesta hay *n* matrimonios y sacamos a bailar a *k* individuos (k par) ¿cuál es la probabilidad de que salgan a bailar exactamente *i* matrimonios?

RESOLUCION:

a) Aplicando los regla de Laplace bastará contar el número de casos posibles y el de favorables. Los casos posibles serán los grupos de 20 que se pueden formar con 60 individuos, es decir, $C_{60,20}$. En cuanto a los casos favorables para que no haya ningún matrimonio tomaré en primer lugar 20 parejas de las 30 existentes, $C_{30,20}$, y teniendo en cuenta que de cada una de ellas podremos elegir al hombre o a la mujer lo multiplicaré por $RV_{2,20}$, con lo que la probabilidad de que no haya ningún matrimonio vendrá dada por:

$$P(\text{ningún matrimonio}) = \frac{RV_{2,20} \times \binom{30}{20}}{\binom{60}{20}} = \frac{2^{20} \times \frac{30!}{20!10!}}{\frac{60!}{20!40!}} = \frac{2^{20}\, 30!\, 40!}{60!\, 10!} = 0.00751566$$

b) Para que haya tres matrimonios, los casos posibles siguen siendo los mismos, y en cuanto a los favorables, en primer lugar se eligen los tres matrimonios de los 30 posibles como $C_{30,3}$ y posteriormente seleccionamos 14 de los 27 matrimonios restantes, $C_{27,14}$ teniendo en cuenta de nuevo que de cada uno de estos puedo elegir al hombre o a la mujer por lo que tendré que multiplicar por $RV_{2,14}$, es decir:

$$P\,(\text{tres matrimonios}) = \frac{\binom{30}{3}\times\binom{27}{14}\times RV_{2,14}}{\binom{60}{20}} = \frac{\frac{30!}{3!27!}\times\frac{27!}{14!13!}\times 2^{14}}{\frac{60!}{20!40!}} = \frac{2^{14}\;30!20!40!}{3!14!13!60!} =$$

$$= 0.318299$$

c) Dado que en el apartado anterior hemos obtenido una probabilidad considerablemente alta para tres matrimonios, calcularemos dicha probabilidad para dos matrimonios aplicando el mismo razonamiento:

$$P\,(\text{dos matrimonios}) = \frac{\binom{30}{2}\times\binom{28}{16}\times RV_{2,16}}{\binom{60}{20}} = 2^{15}\,\frac{30!20!40!}{16!12!60!} = 0.206894$$

Esta probabilidad todavía no nos permite asegurar nada respecto al máximo por lo que a continuación calcularemos la probabilidad de cuatro matrimonios:

$$P\,(\text{cuatro matrimonios}) = \frac{\binom{30}{4}\times\binom{26}{12}\times RV_{2,12}}{\binom{60}{20}} = 2^{9}\,\frac{30!20!40!}{3\times 16!12!60!} = 0.258618$$

Ahora sí estamos en condiciones de asegurar, puesto que las probabilidades de dos tres o cuatro matrimonios suman 0.7838 y por tanto la suma de todas las restantes (0.2162) es menor que la de tres, que el número más probable de matrimonios que encontraremos es tres y que su probabilidad como se ha visto en el apartado anterior es 0.3183.

d) De los apartados anteriores se deriva que la probabilidad de que haya *i* matrimonios en un grupo de *k* individuos seleccionados de entre *n* matrimonios será:

$$P\,(\text{i matrimonios}) = \frac{\binom{n}{i}\times RV_{2,k-2i}\times\binom{n-i}{k-2i}}{\binom{2n}{k}} = 2^{k-2i}\,\frac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-2i}}{\binom{2n}{k}}$$