Resultados del Problema 1.

3º . . . 0
4º . . . 1
12º . . . 0
14º . . . 2
15º . . . 0

Resultados del problema 2.

1º . . . 5
3º . . . 3
7º . . . 0
11º . . . 0
14º . . . 0
15º . . . 0

4º EDICIÓN DEL PREMIO JORGE JUAN

Problemas propuestos de Cálculo Diferencial y Análisis Matemático

1. Demostrar que si $f:[0,+\infty)\to R$ es una función continua y $\int_0^\infty f^2(x)dx<+\infty$, entonces la función $g(x)=f(x)-2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ cumple la relación:

$$\int_0^\infty g^2(x)dx=\int_0^\infty f^2(x)dx.$$

2. Sean $f_1,f_2,\ldots f_n:R\to R$ funciones periódicas tales que la función suma $f=f_1+f_2+\ldots+f_n$ tenga límite finito cuando $x\to+\infty$.
Demostrar que f es constante.

Probar además que si $a_1,a_2,a_3\in R$ y $a_1\cos a_1x+a_2\cos a_2x+a_3\cos a_3x\geq 0$ para todo $x\in R$, entonces $a_1a_2a_3=0$.

1. Como $\int_0^\infty f^2(x)dx<+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Aplicando l'Hôpital

(1) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt = 0$. Podemos comprobar

que $(f-g)'=f+g$. Entonces ~~[illegible]~~ la integral

$$\int_0^\infty (f^2-g^2)dx = \frac{1}{2}(f-g)^2\Big|_0^\infty = 0 \text{ por } (1).$$