## 1. III Premios Jorge Juan

## 2. Problema de Probabilidades

2.- Una pulga se desplaza en el plano $XY$, partiendo del origen de coordenadas. Cada salto tiene longitud 1, y viene caracterizado por la dirección del salto, expresada a través del ángulo $\theta$ que ésta forma con el semieje positivo de abscisas. De esta forma el salto n-ésimo viene caracterizado por la variable $\theta_n$, y supondremos que las variables $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$, son independientes entre sí, con distribución común uniforme en el intervalo $[0, 2\pi[$.

Si representamos por $(X_n, Y_n)$ las coordenadas cartesianas de la posición de la pulga después de efectuar el salto n-ésimo, se pide:

i) Expresar $X_n$ e $Y_n$ en función de $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$.

ii) Calcular las esperanzas $E(X_n)$ y $E(Y_n)$.

iii) Si denotamos por $D_n$ la distancia de la pulga al origen de coordenadas después del salto n-ésimo, calcular la esperanza $E(D_n^2)$.

iv) Si $X$ es una variable aleatoria y $g(.)$ es una función convexa sobre $]-\infty, +\infty[$, se cumple siempre la llamada *desigualdad de Jensen:*

$$g(E(X)) \leq E(g(X)).$$

Utilizando esta desigualdad (y eligiendo convenientemente la función $g$), determinar una cota superior al valor de $E(D_n)$.

*Solución del Ejercicio 2*:

i) Se tiene evidentemente

$$\begin{cases} X_1 = \cos\theta_1 \\ Y_1 = \sin\theta_1 \end{cases}, \begin{cases} X_2 = X_1 + \cos\theta_2 = \cos\theta_1 + \cos\theta_2, \\ Y_2 = Y_1 + \sin\theta_2 = \sin\theta_1 + \sin\theta_2, \end{cases},$$

y

$$\begin{cases} X_n = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + ... + \cos\theta_n, \\ Y_n = \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + ... + \sin\theta_n. \end{cases},$$

ii) Resulta obvio que

$$E(X_n) = nE(\cos\theta) \text{ y } E(Y_n) = nE(\sin\theta), \text{ siendo } \theta \sim UNIF([0, 2\pi[).$$

Entonces cálculos triviales conducen a $E(X_n) = E(Y_n) = 0$.

iii) Evidentemente

$$D_n^2 = X_n^2 + Y_n^2.$$

Por lo tanto

$$E(D_n^2) = E(X_n^2) + E(Y_n^2).$$

Además

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} \cos^2\theta_i + 2\sum_{i<j} \cos\theta_i \cos\theta_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(\cos^2\theta_i) + 2\sum_{i<j} E(\cos\theta_i \cos\theta_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(\cos^2\theta_i) + 2\sum_{i<j} E(\cos\theta_i)E(\cos\theta_j) \text{ (por independencia)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(\cos^2\theta_i) = nE(\cos^2\theta) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$E(Y_n^2) = \frac{n}{2},$$

y

$$E(D_n^2) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

iv) Tomaremos $g(x) = x^2$. Se verificará $\{E(D_n)\}^2 \leq E(D_n^2) = n$, y por lo tanto $E(D_n) \leq \sqrt{E(D_n^2)} = \sqrt{n}$.