

III PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS 2000

Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

Lógica

Dpto. de *Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*

Análisis de las Conectivas Lógicas

En la mayoría de los libros de lógica, cuando se habla del lenguaje, se explican cinco conectivas lógicas¹: negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), implicación (\rightarrow) y coimplicación (\leftrightarrow)². Supongo que alguna vez te habrás preguntado (sino este es un buen momento para preguntártelo) ¿por qué cinco conectivas?, ¿por qué estas cinco precisamente?, ¿podríamos trabajar con menos sin perder expresividad?, ¿perdemos expresividad por no utilizar alguna otra distinta?, ¿podríamos utilizar otras en lugar de estas?

Ahora deberás responder a esas preguntas. Justifica tus respuestas (formaliza, responde en lenguaje natural y corrobora con tablas de verdad) :

1. Supongamos que tu hermano pequeño quiere aprender lógica y nos dice que comprende perfectamente las palabras *no* e *y*, pero que no tiene claro el significado de la palabra *o*. Explícaselo usando únicamente los conceptos de *no* e *y*.
2. Supongamos que las palabras cuyo significado comprende son *no* y *o*, y debes hacerle entender el significado de *y*.
3. Supongamos que esta vez comprende los significados de *no*, *y* y *o* y quiere que le expliquemos el significado de la implicación (condicional) pero ten en cuenta que únicamente podremos utilizar los conceptos de negación, conjunción y disyunción.
4. Supongamos que tiene claros los conceptos de *no* y *si...entonces*, ¿cómo le explicarías la conjunción y la disyunción?
5. Esta vez la situación es que únicamente conoce el significado de la implicación, ¿cómo le explicarías el significado de la disyunción? ¿podrías explicarle la negación y la conjunción?
6. Explica el significado del coimplicador en función de la negación, conjunción y disyunción.
7. Si conoce el significado del implicador y del coimplicador, ¿cómo le explicarías la conjunción?
8. Sabemos que los cinco conectores pueden reducirse a dos (\neg y \wedge , o alternativamente \neg y \vee , o también \neg y \rightarrow). ¿Puedes encontrar un único conector lógico a partir del cuál puedas definir estos cinco?

¹ Hablamos de Lógica de Primer Orden con dos valores de verdad, y las conectivas definidas de la forma conocida por todos

² La sintaxis (símbolos utilizados para las conectivas) puede variar de unos autores a otros

Análisis de las Conectivas Lógicas

Soluciones :³

- Supongamos que tu hermano pequeño quiere aprender lógica y nos dice que comprende perfectamente las palabras *no* e *y*, pero que no tiene claro el significado de la palabra *o*. Explícaselo usando únicamente los conceptos de *no* e *y*.

$$(p \vee q) \text{ es equivalente a } \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Decir que al menos una de las dos proposiciones es verdadera es lo mismo que decir que no puede darse que no se den ninguna de las dos (no es cierto que ambas sean falsas)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F

- Supongamos que las palabras cuyo significado comprende son *no* y *o*, y debes hacerle entender el significado de *y*.

$$(p \wedge q) \text{ es equivalente a } \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Decir que las dos proposiciones son verdaderas es lo mismo que decir que no puede darse que alguna de las dos sea falsa (no es cierto que alguna sea falsa)

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

- Supongamos que esta vez comprende los significados de *no*, *y* y *o* y quiere que le expliquemos el significado de la implicación (condicional) pero ten en cuenta que únicamente podremos utilizar los conceptos de negación, conjunción y disyunción.

Puede hacerse de varias formas. Elegiremos una de ellas:

$$(p \rightarrow q) \text{ es equivalente a } \neg(p \wedge \neg q)$$

Decir que si de da *p* entonces debe darse *q* es equivalente a decir que no puede ser que se den al mismo tiempo *p* y no *q* (no es cierto que se de el antecedente y no el consecuente)

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

³ Problema y solución basadas en el libro de Raymond Smullyan *Juegos por siempre misteriosos*

4. Supongamos que tiene claros los conceptos de *no* y *si...entonces*, ¿cómo le explicarías la conjunción y la disyunción?

$(p \vee q)$ es equivalente a $(\neg p \rightarrow q)$

Decir que al menos una de las dos proposiciones es verdadera es lo mismo que decir que si no se da la primera deberá darse la segunda

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

$(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg(p \rightarrow \neg q)$

Decir que las dos proposiciones son verdaderas es lo mismo que decir que es falso que la verdad de primera deba obligatoriamente llevarme a la falsedad de la segunda

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F

5. Esta vez la situación es que únicamente conoce el significado de la implicación, ¿cómo le explicarías el significado de la disyunción? ¿podrías explicarle la negación y la conjunción?

$(p \vee q)$ es equivalente a $(p \rightarrow q) \rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

No se puede explicar el significado de la negación ni de la conjunción a partir únicamente del implicador.

6. Explica el significado del coimplicador en función de la negación, conjunción y disyunción.

Puede hacerse de varias formas. Elegiremos una de ellas:

$(p \leftrightarrow q)$ es equivalente a $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Decir que dos proposiciones son equivalentes es lo mismo que decir que las dos son verdaderas o las dos son falsas

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

7. Si conoce el significado del implicador y del coimplicador, ¿cómo le explicarías la conjunción?

$(p \wedge q)$ es equivalente a $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

8. Sabemos que los cinco conectores pueden reducirse a dos (\neg y \wedge , o alternativamente \neg y \vee , o también \neg y \rightarrow). ¿Puedes encontrar un único conector lógico a partir del cuál puedas definir estos cinco?

Puede hacerse de varias formas. Elegiremos una de ellas:

En 1913 el lógico Henry M. Sheffer definió el símbolo "|", que se conoce como la "marca de Sheffer" que lo podemos interpretar como " p y q son incompatibles" (por lo menos una es falsa). Su tabla de verdad es:

p	q	$p q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

La negación la podemos definir como:

$(\neg p)$ es equivalente a $(p | p)$

Ya que las dos proposiciones son la misma y la marca de Sheffer dice que al menos una debe ser falsa, nos lleva a que la proposición es falsa.

p	$\neg p$	$p q$
V	F	F
V	F	F
F	V	V
F	V	V

Ahora que ya tenemos la negación, la conjunción quedaría como:

$(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg(p | q)$

Como la marca de Sheffer dice que al menos una debe ser falsa, su negación quiere decir que las dos son verdaderas

p	q	$p \wedge q$	$p q$	$\neg(p q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Una vez que tenemos la negación y la conjunción, podemos definir la disyunción (apartado 1), la implicación (apartado 3) y la coimplicación (apartado 6)

Faraón Llorens Largo

Alicante, noviembre de 2000