III EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 00/01

<u>COMBINATORIA</u>

Algunos alumnos de la Licenciatura de Matemáticas han tenido la original y simpática idea de proponer a sus compañeros el siguiente juego: se presentan en un impreso dos fotografías de diez de sus profesores, un de ellas actual y la otra de cuando eran “más jóvenes”, el juego consiste en emparejar dichas fotografías que obviamente están desordenadas. Suponiendo que la calidad de los impresos impida reconocer los emparejamientos (puesto que no podemos imaginar otro motivo) y por tanto todos los participantes resuelven el juego azar;

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertarlos todos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar alguno?
c) ¿Cuál es el número más improbable de aciertos? ¿Y el más probable? ¿Cuánto valen estas probabilidades?
d) Si en el juego se incluyen *n* profesores, ¿cuál es la probabilidad de conseguir *i* aciertos (*i = 0 , 1 , 2 , … n*)?

NOTA: El número de casos en que no se consigue ningún acierto, con *n* profesores es:

$$A_0(n) = n!\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

<u>RESOLUCION:</u>

a) Aplicando la regla de Laplace, existe un caso favorable y pemutaciones de diez casos posibles, por tanto, y denotando por A_i (n) al número de posibilidades de obtener i aciertos entre n profesores, tendremos:

$$P\,(\text{acertarlos todos}) = \frac{A_{10}(10)}{P_{10}} = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800}$$

b) La probabilidad de acertar alguno, recurriendo a sucesos complementarios, será uno menos la probabilidad de no acertar ninguno. Dicha probabilidad a partir de la expresión que se proporciona en el enunciado será:

$$P\,(\text{acertar alguno}) = 1 - P\,(\text{no acertar ninguno}) = 1 - \frac{A_0(10)}{P_{10}} = 1 - \frac{10!\sum_{k=2}^{10}\frac{(-1)^k}{k!}}{10!} =$$

$$1 - \sum_{k=2}^{10}\frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} - \frac{1}{362880} + \frac{1}{3628800}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1814400 - 604800 + 151200 - 30240 + 5040 - 720 + 90 - 10 + 1}{3628800} = 1 - \frac{1334961}{3628800}$$

Por tanto la probabilidad de acertar alguno es 0.6321.

c) Dado que es imposible acertar nueve, puesto que si se aciertan nueve necesariamente el restante también se acertará, el caso más improbable es 9 y su probabilidad vale 0.

Teniendo en cuenta la dificultad del juego, la intuición nos indica que lo más probable es obtener "pocos" aciertos. En el apartado anterior se ha calculado la probabilidad de no acertar ninguno. Dado que esta probabilidad es aproximadamente 0.3679 no tiene porqué ser necesariamente la más alta, por ello calculamos también la probabilidad de acertar uno. El número total de posibilidades de acertar uno se obtiene, a partir de la información del enunciado, como número de casos en que se acierta uno multiplicado por el número de casos en que no se acierta ninguno en un juego con nueve profesores, partido por el número de casos posibles:

$$P(\text{acertar uno}) = \frac{\binom{10}{1} \times A_0(9)}{P_{10}} = \frac{10 \times 9! \times \sum_{k=2}^{9} \frac{(-1)^k}{k!}}{10!} = \sum_{k=2}^{9} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} - \frac{1}{362880} \right) = \frac{133496}{362880}$$

Dado que $A_0(10)=1334961$ y $A_1(10)=1334960$, P(no acertar ninguno) > P(acertar uno), además la suma de ambas probabilidades es 0.7358 por tanto ahora sí estamos seguros de que el número de aciertos más probable es cero y su probabilidad es 0.3679.

d) La probabilidad de conseguir *i* aciertos de *n*, aplicando la regla de Laplace como en todos los apartados anteriores se obtiene como el número total de casos favorables (posibilidades de acertar *i* de *n* por posibilidades de no acertar ninguno en *n-i*), partido por casos posibles (permutaciones de *n*):

$$P(\text{acertar i de n}) = \frac{\binom{n}{i} \times A_0(n-i)}{P_n} = \frac{\frac{n!}{(n-i)!\,i!} \times (n-i)! \sum_{k=2}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} =$$

$$= \frac{1}{i!} \sum_{k=2}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!}$$