II PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS 1999

$Facultad\, de\, Ciencias$

$Universidad\, de\, Alicante$

PROBLEMA DE ANÁLISIS

Sea $f:[1,3]\to R$ continua y derivable, y supongamos que la ecuación $f(x)=x$ tiene sólo una raíz $x_0=\frac{3}{2}$. Definimos $u_1=f(u_0)$ para $u_0\in[1,3]$ y $u_n=f(u_{n-1})$, $n=1,2,...$Se pide:
(a) Demostrar que, si se cumple $0\le f'(x)\le 1$ para todo $x\in[1,3]$, entonces $u_n\in[1,3]$ para todo $n\in N$.
(b) Demostrar que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona.
(c) Que $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{3}{2}$.

PROBLEMA DE ÁLGEBRA

Decimos que un dominio de integridad (cuerpo) dotado de un orden total $\leq$ es un *dominio (cuerpo) ordenado* cuando la suma y el producto son compatibles con el orden, es decir, cuando se cumple

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

y

$$(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$$

para cualesquiera tres elementos x, y y z del dominio. Un dominio (cuerpo) ordenado es *arquimediano* cuando para todo elemento del mismo existe un cierto múltiplo de la unidad (el resultado de sumar la unidad consigo misma cierto número de veces) que le sigue en el orden.

(a) Dar un ejemplo de dominio ordenado arquimediano (que no sea cuerpo) y otro de cuerpo ordenado arquimediano.

(b) Definir sobre el conjunto $\{0, 1\}$ una estructura de dominio ordenado, si es posible. ¿Es arquimediano?

(c) Se define en $R[x]$ (dominio de integridad de los polinomios en x con coeficientes reales) la relación binaria $p(x) \leq q(x)$ cuando $q(x) - p(x)$ es nulo o el coeficiente de la mayor potencia de x es positivo. Decir si $(R[x], +, ., \leq)$ es un dominio ordenado arquimediano.

(d) Se dice que la fracción $\frac{p(x)}{q(x)} \in R(x)$ (cuerpo de fracciones de $R[x]$) es positiva cuando $p(x)\,q(x) > 0$ en $R[x]$. Se define una relación binaria en $R(x)$ a través de sus elementos positivos: $r \leq s$ cuando $s - r$ es positivo o cero. Decir si $(R(x), +, ., \leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE ÁLGEBRA

(a) $(Z, +, ., \leq)$ o $(pZ, +, ., \leq)$ (donde pZ es el conjunto de los múltiplos de p) son dominios ordenados, pero no cuerpos; $(Q, +, ., \leq)$, $(Q(\alpha), +, ., \leq)$ (siendo α un número real trascendente) o $(R, +, ., \leq)$ son cuerpos ordenados. Hay que dar un ejemplo de cada clase.

(b) En un conjunto con tan sólo dos elementos, en el que se representa por 0 el neutro de la suma y por 1 el neutro del producto el único dominio de integridad que puede definirse es Z_2 (que es un cuerpo). Hay dos formas de ordenar $\{0, 1\}$:

Si $0 \leq 1$, y $(Z_2, +, ., \leq)$ es cuerpo ordenado, el orden debe mantenerse al sumar 1 a ambos miembros, por lo que $1 \leq 0$. Entonces, por la propiedad antisimétrica tiene que ser $0 = 1$, contra la hipótesis (se supone que tenemos una pareja).

Si $1 \leq 0$, el mismo argumento conduce a $0 \leq 1$, por lo que encontramos de nuevo $0 = 1$.

Se concluye que es imposible dotar al conjunto $\{0, 1\}$ con la estructura de dominio ordenado. Obviamente, nunca podrá ser dominio ordenado arquimediano.

(c) Puede comprobarse que $(R[x], +, ., \leq)$ es un dominio ordenado pero, en realidad, basta probar que no puede ser arquimediano para concluir que la respuesta es negativa. Tal cosa es fácil de probar mediante un contraejemplo: si el polinomio x y el número natural n safisfaciesen $x \leq n$, debería ser positivo o cero el coeficiente de x en $-x + n$, cosa que no se cumple.

(d) El argumento es semejante. Basta ver que no se cumple $\frac{x}{1} \leq n$.