I PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS 1998

Facultad de Ciencias

Universidad de Alicante

1.- Sea $n \geq 2$.

(a) Expresar $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ y $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ en función de n.

(b) Demostrar que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) g(k/n)$$

define un producto escalar sobre el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a n, que denotaremos por $\mathbb{R}_n [x]$.

(c) Demostrar que la operación definida en (b) no proporciona un producto escalar sobre $\mathbb{R}_{n+1} [x]$.

(d) Considérese el espacio euclídeo del apartado (b). Hallar todos los polinomios de primer grado que son ortogonales al polinomio $f(x) = x$.

(e) Hallar el polinomio de primer grado más próximo a $g(x) = x^2$ para ese mismo espacio euclídeo.

2.- Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Se pide:

(a) Demostrar que si f satisface la propiedad

$$f(xt) = f(x)+f(t), \text{cualesquiera que sean } x > 0 \text{ y } t > 0, \tag{1}$$

entonces $f'(x) = \frac{a}{x}$ para un cierto número real a (Ayuda: utilizar la definición de derivada, procurando usar en el cálculo la propiedad (1), a partir de la cual se calcula también $f(1)$).
(b) Demostrar la validez del recíproco (si f es tal que $f'(x) = \frac{a}{x}$ para $a \in \mathbb{R}$, entonces f satisface la propiedad de arriba) sin recurrir al cálculo de primitivas.

(c) Dar un ejemplo de función continua $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = g(1/x)$ para todo $x > 0$.