

I PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS 1998
Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

Lógica

Dpto. de *Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*

En la Edad Media existía cierto pueblo en las montañas alicantinas habitado por moros y por cristianos. Los moros, en represalia por la reconquista, siempre mentían; los cristianos, por el contrario, siempre decían la verdad. Además, algunos moros eran considerados “moros establecidos” y de forma similar los “cristianos establecidos”, haciendo referencia a que en un cierto sentido se han demostrado a sí mismos.

Los habitantes del pueblo se han organizado en asociaciones o “filaes”, siendo posible que un habitante pertenezca a más de una “filà”. Dado cualquier habitante x y cualquier filà f , o bien x afirma que es un miembro de f o bien afirma que no es un miembro de f .

Por otro lado, sabemos que se cumplen las cuatro condiciones que enumeramos a continuación:

- C₁: El conjunto de todos los cristianos establecidos forma una filà
- C₂: El conjunto de todos los moros establecidos forma una filà
- C₃: Dada cualquier filà f , el conjunto de todos los habitantes del pueblo que no son miembros de f forman una filà de su exclusividad, llamada “complemento de f ” y que denotaremos por f' . (*Condición de Complementación*)
- C₄: Dada cualquier filà f , hay al menos un habitante del pueblo que afirma que es un miembro de f . Naturalmente su afirmación puede ser cierta o falsa. (*Condición Gödeliana*)

Se pide:

1. Demostrar que hay al menos un cristiano no establecido en el pueblo.
2. Demostrar que hay al menos un moro no establecido en el pueblo.
3. ¿Forma una filà el conjunto de todos los moros del pueblo?
4. ¿Forma una filà el conjunto de todos los cristianos del pueblo?

I PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS 1998
Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

Lógica

Dpto. de *Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*

Solución:

1. Por C_1 tenemos que el conjunto CE de todos los cristianos establecidos forma una filà. De esto y la condición C_3 se sigue que el conjunto CE', formado por todos los habitantes de la isla que no son cristianos establecidos forma una filà. Por la condición C_4 y como tenemos una filà formada por los que no son cristianos establecidos, hay al menos un habitante del pueblo que afirma que es miembro de dicha filà, es decir, afirma que no es un cristiano establecido. Pero, un moro no puede afirmar que no es un cristiano establecido, ya que estaría diciendo la verdad. Por tanto, el que hace la afirmación debe ser un cristiano y puesto que los cristianos siempre dicen la verdad, no puede ser un cristiano establecido (ya que estaría mintiendo). De todo ello se sigue que la afirmación la está haciendo un habitante que es cristiano pero no establecido.
2. Por C_2 tenemos que el conjunto ME de todos los moros establecidos forma una filà. Por la condición C_4 y como tenemos una filà formada por los moros establecidos, hay al menos un habitante del pueblo que afirma que es miembro de dicha filà, es decir, afirma que es un moro establecido. Pero, un cristiano no puede afirmar que es un moro establecido, ya que estaría mintiendo. Por tanto, el que hace la afirmación debe ser un moro y puesto que los moros siempre mienten, no puede ser un moro establecido (ya que estaría afirmando verazmente). De todo ello se sigue que la afirmación la está haciendo un habitante que es moro pero no establecido.
3. No, el conjunto de todos los moros del pueblo no forma una filà. Si formara una filà el conjunto de todos los moros del pueblo, entonces por C_4 tendríamos que hay al menos un habitante del pueblo que afirma que es un moro. Tal habitante no puede ser cristiano ya que estaría mintiendo. Por otro lado, tampoco puede ser un moro ya que estaría diciendo la verdad. Por tanto, no puede existir tal filà.
4. No, el conjunto de todos los cristianos del pueblo no forma una filà. Si formara una filà el conjunto de todos los cristianos del pueblo, entonces por C_3 tendríamos que el conjunto de todos los habitantes del pueblo que no son cristianos forman una filà, es decir, que el conjunto de todos los moros forma una filà. Como hemos visto en el punto 3, no puede existir tal tipo de filà, de lo que concluimos que el conjunto de todos los cristianos no puede formar una filà.

Faraón Llorens Largo

Alicante, 7 de noviembre de 1998