

Facultat de **C**iències **M**atemàtiques

VNIVERSITAT  DE VALÈNCIA

Olga Gil Medrano

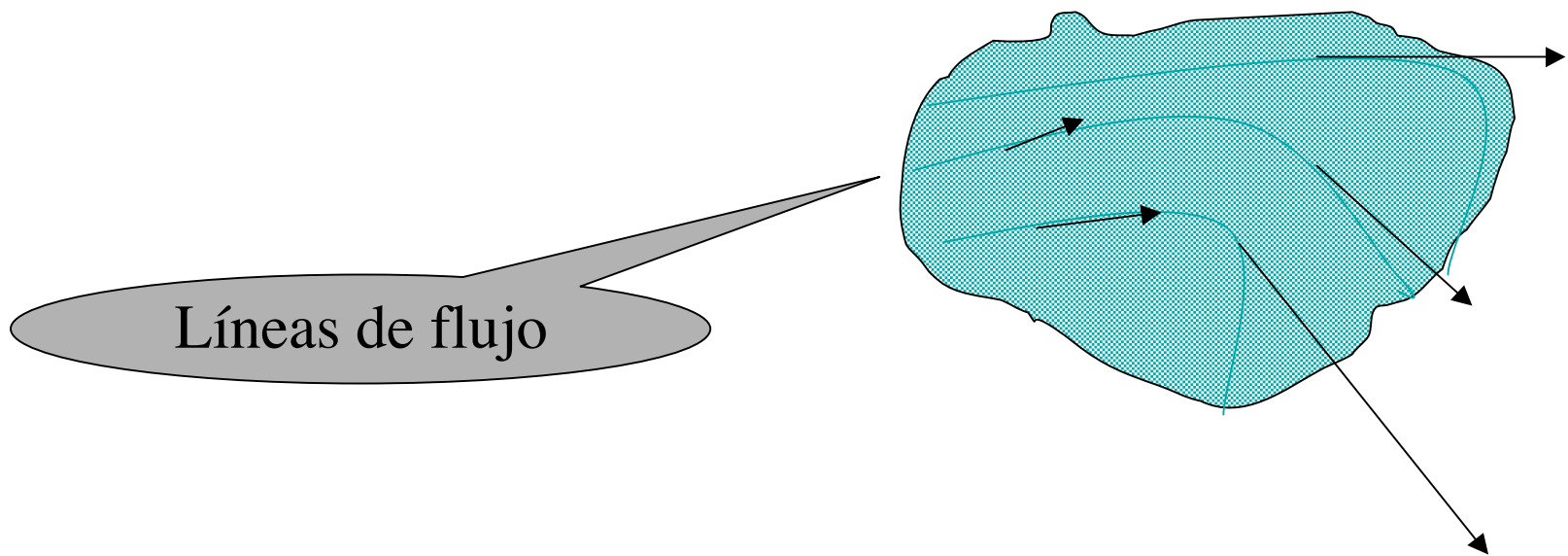
Alicante, 18-03-09

(θ, ψ)

¿Cuáles son los mejores
campos de vectores
tangentes a las esferas?

Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

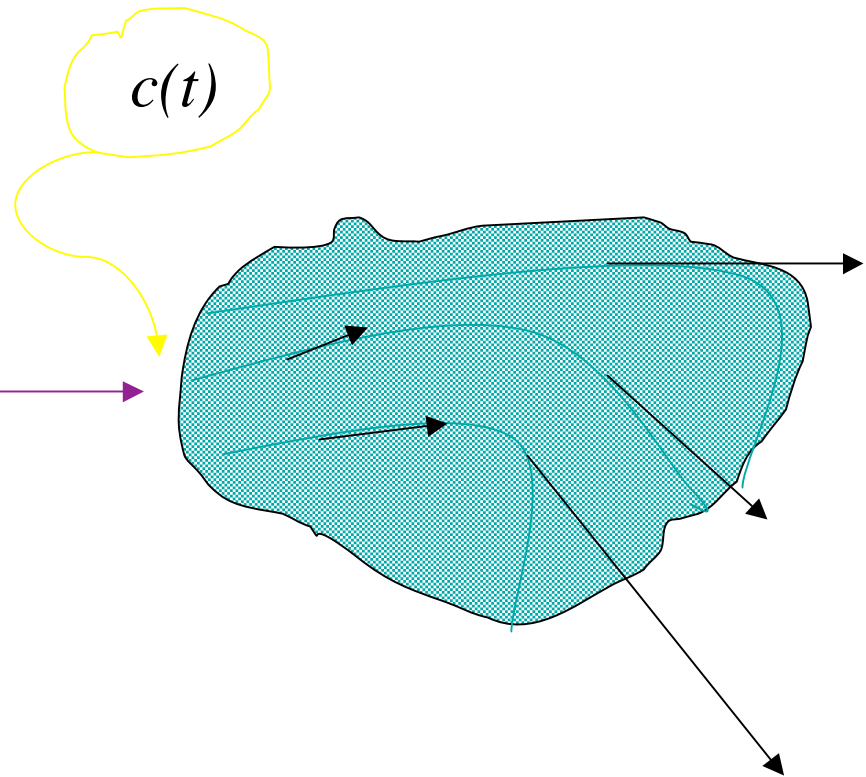
$$\begin{array}{lcl} V: M \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^n \\ p & \dots\dots\dots & (p, V(p)) \end{array}$$



Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

$$\begin{array}{ccc} V: M \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^n \\ p & \dots\dots\dots & (p, V(p)) \end{array}$$

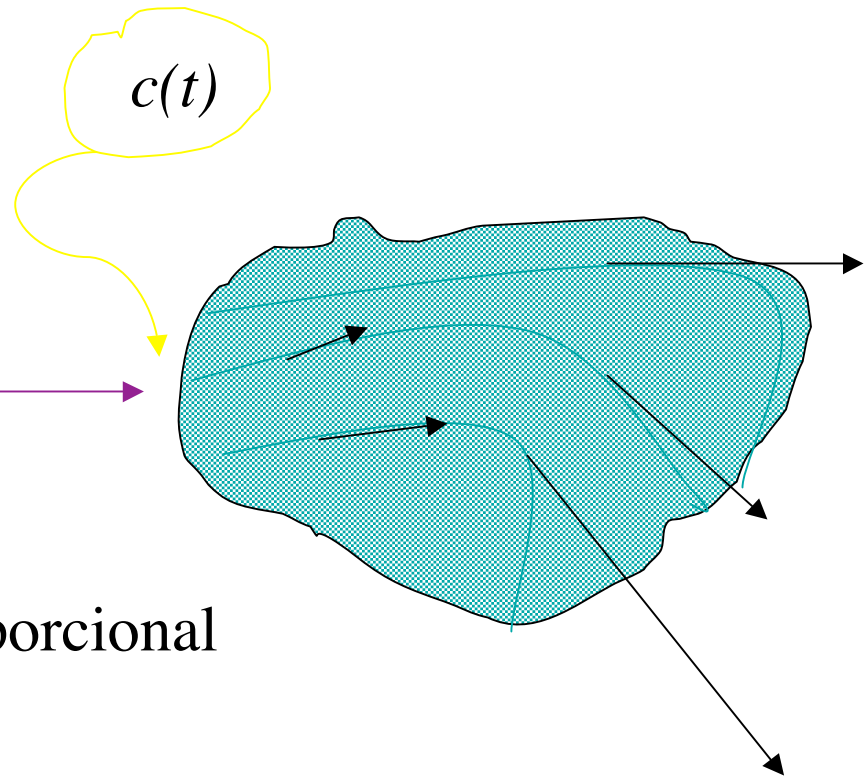
$$c'(t) = V(c(t))$$



Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

$$\begin{array}{ccc} V: M \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^n \\ p & \dots\dots\dots & (p, V(p)) \end{array}$$

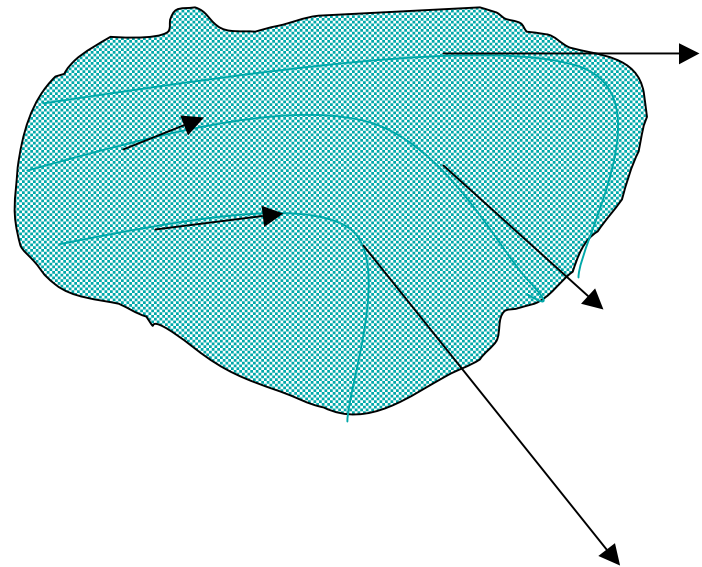
$$c'(t) = V(c(t))$$



Energía de la curva en p es proporcional a la norma de la aceleración

Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

$$\begin{array}{l} V: M \subseteq R^n \longrightarrow M \times R^n = \cup (\{p\} \times R^n) = \cup T_p M = TM \\ p \quad \dots\dots\dots (p, V(p)) \end{array}$$



Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

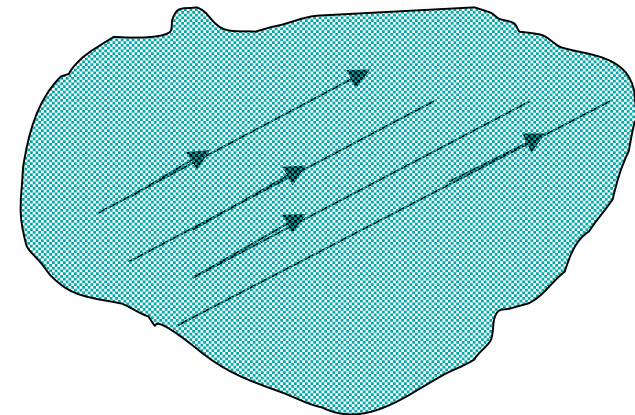
$$V: M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n = \cup (\{p\} \times \mathbb{R}^n) = \cup T_p M = TM$$

$$p \quad \dots\dots\dots (p, V(p))$$



Paralelo

*Para todo p ,
 $(\nabla V)_p$ se anula*



*Endomorfismo de $T_p M$ determinado
 por la matriz de Jacobi de V en p*

Campos de vectores paralelos definidos en un abierto del espacio euclídeo

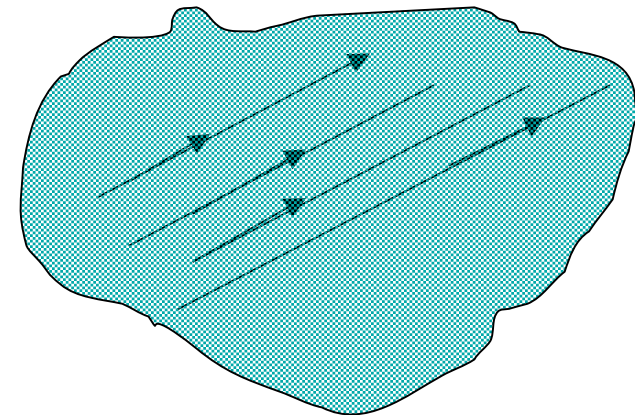
$$V: M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n = TM$$

$$p \quad \dots\dots\dots (p, V(p))$$



Paralelo

*Para todo p ,
 $(\nabla V)_p$ se anula*

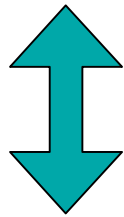


- ✓ Norma constante
- ✓ Líneas de flujo geodésicas
- ✓ Flujo consiste en isometrías

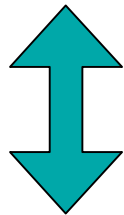
*Endomorfismo de $T_p M$ determinado
por la matriz de Jacobi de V en p*

Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

V es paralelo

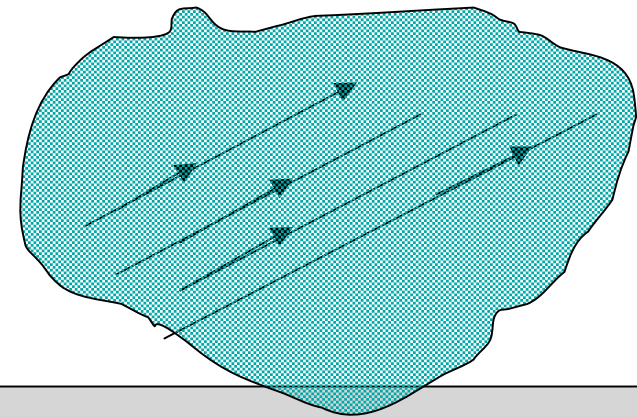


*Para todo p ,
 $(\nabla V)_p$ se anula*



*V minimiza el volumen
y la energía*

- ✓ Norma constante
- ✓ Líneas de flujo geodésicas
- ✓ Flujo consiste en isometrías



$$1/2 \int_M (\text{tr } L_V)$$

$$L_V = \text{Id} + (\nabla V)^t (\nabla V)$$

Campos de vectores definidos en un abierto del espacio euclídeo

V es paralelo



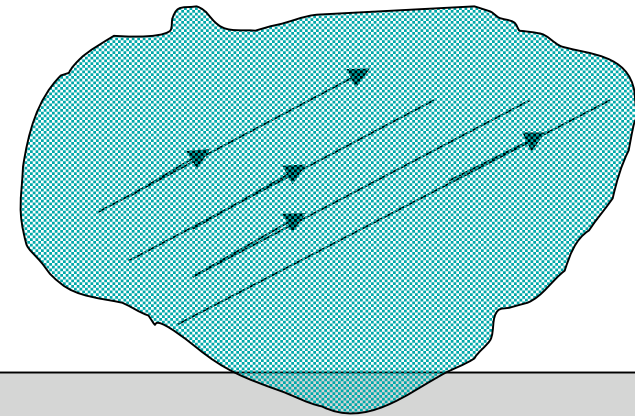
*Para todo p ,
 $(\nabla V)_p$ se anula*



*V minimiza el volumen
y la energía*



- ✓ Norma constante
- ✓ Líneas de flujo geodésicas
- ✓ Flujo consiste en isometrías



$$\int_M (\det L_V)^{1/2}$$

$$L_V = \text{Id} + (\nabla V)^t (\nabla V)$$

Campos de vectores definidos en una variedad

$$V: M^n \subseteq R^m \longrightarrow TM = \cup (\{p\} \times T_p M) \subseteq R^m \times R^m$$

$p \dots\dots\dots (p, V(p))$

*Para todo p ,
 $(\nabla V)_p$ se anula*



Paralelo

*Endomorfismo de $T_p M$ definido por
 $(\nabla V)_p(\alpha'(0)) = \text{proyección en } T_p M \text{ de } (V \circ \alpha)'(0)$*

Campos paralelos en una variedad

Si V es paralelo entonces la curvatura de todos los planos que lo contienen es nula.

Caso particular:

campos paralelos en una superficie

Si una superficie M tiene un campo paralelo V entonces la curvatura es nula.

Problema de Gluck y Ziller,
(1985)

Encontrar los mejores
campos unitarios en las
esferas de dimensión impar.*

$$V: S^n \longrightarrow T^l S^n \quad n=2m+1$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ V_{2,n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ O(n+1)/O(n-1) \end{array}$$

Variedad de Stiefel de R^{n+1}
(2-referencias ortonormales)

$$\text{Vol}(V) := \text{vol}(V(S^n))$$

mejores = con menor volumen*

Campos de Hopf

$$\pi: S^n \longrightarrow \mathbf{C}P^m$$

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{e^{i\theta} p\}$$

$$H(p) = i p = J(p)$$

campos de Hopf usuales

Los campos de Hopf son exactamente los campos de Killing unitarios de las esferas.

Campos de Hopf

$$\pi: S^n \longrightarrow \mathbf{C}P^m$$

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{e^{i\theta} p\}$$

$$H(p) = i p = J(p)$$

campos de Hopf usuales

$$(H^*g^S)(H,H) = 1 \quad \text{y} \quad (H^*g^S) = 2g \quad \text{on} \quad H^\perp$$

$H(S^n)$ con la métrica inducida es una esfera de Berger

$$\text{Vol}(H) = 2^m \text{vol}(S^n)$$

H. Gluck y W. Ziller, Comment. Math. Helv. 86

Teorema:

Los campos de vectores unitarios de volumen mínimo de S^3 son precisamente los campos de Hopf y no otros.

H. Gluck y W. Ziller, *Comment. Math. Helv.* 86

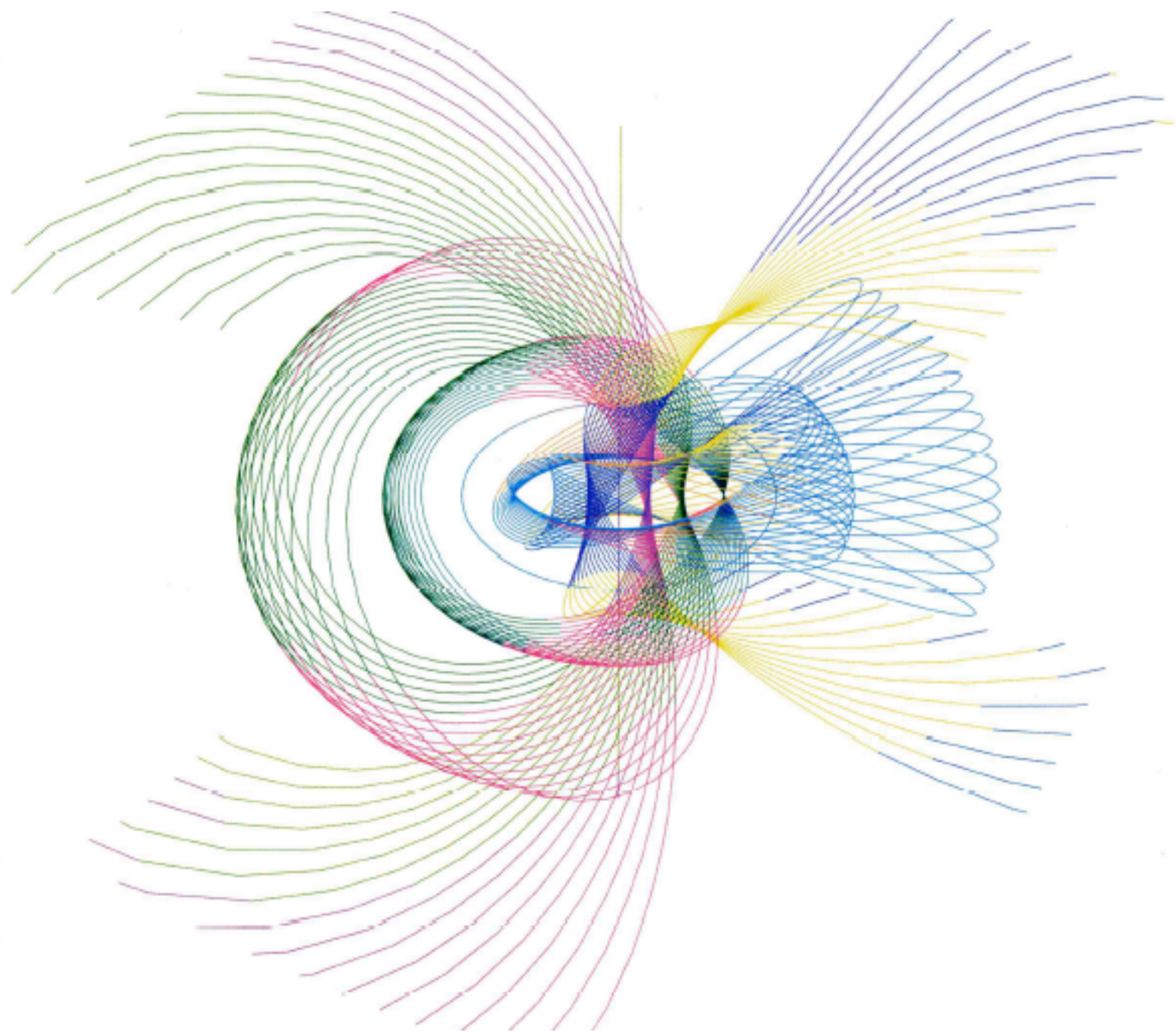
Teorema:

Los campos de vectores unitarios de volumen mínimo de S^3 son precisamente los campos de Hopf y no otros.

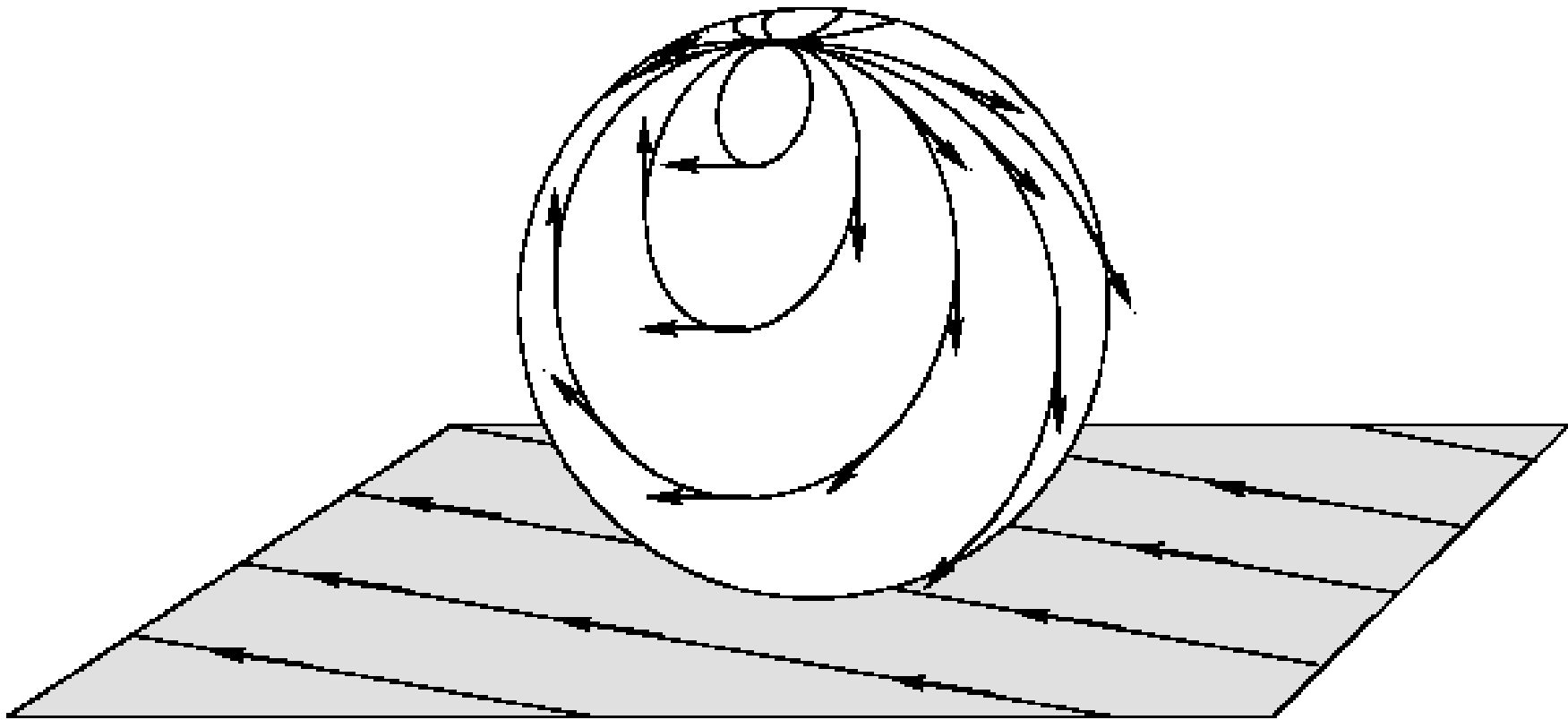
S. Pedersen, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93

Teorema:

Existen campos de vectores unitarios en S^n ($n > 3$) con volumen menor que el de los campos de Hopf.



Un campo de Pontriagin (obtenido por transporte paralelo de un vector a lo largo de las geodésicas radiales) es una inmersión minimal de la esfera menos un punto, para cualquier dimensión. Pedersen, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93



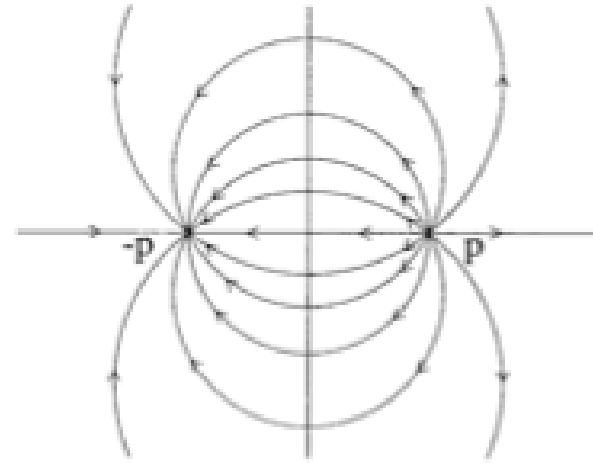
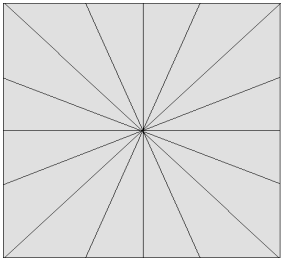
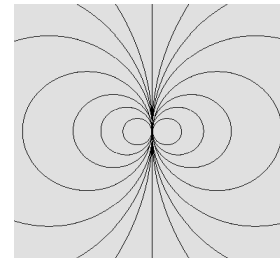
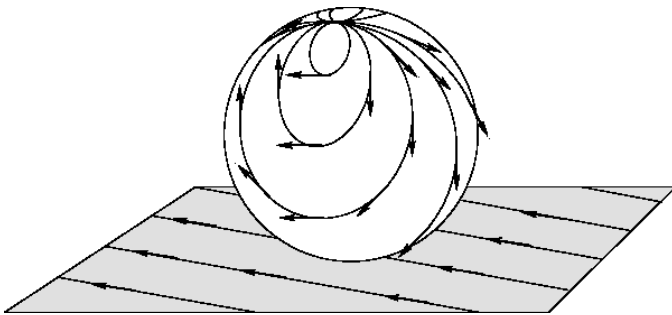


Figure 1.



Un campo de Pontriagin (obtenido por transporte paralelo de un vector a lo largo de las geodésicas radiales) es una inmersión minimal de la esfera menos un punto, para cualquier dimensión.

Pedersen, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93

Si $m > 1$, $r = 1$ entonces $\text{Vol}(P) < \text{Vol}(H)$

Existen campos unitarios diferenciables P_t tal que $\text{Vol}(P_t) \rightarrow \text{Vol}(P)$

Conjetura : El ínfimo del volumen de campos u. d. en las esferas es $\text{Vol}(P)$

Brito, Chacón, Naveira, *Comm. Math. Helv.*, 2004

Para los campos radiales R definidos en la esfera menos dos puntos antípodas se cumple $\text{Vol}(R) < \text{Vol}(V)$.

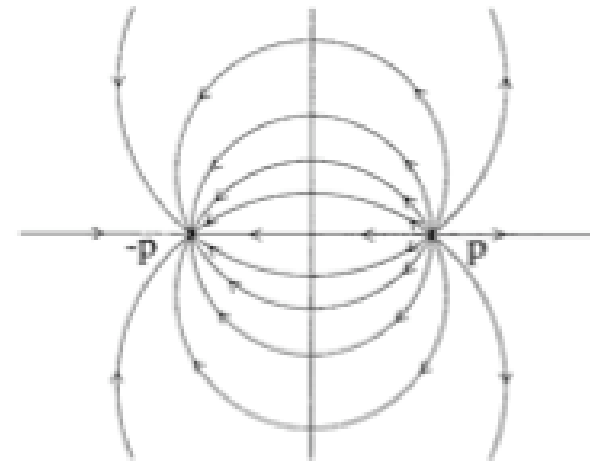


Figure 1.

(Borrelli and -----, *Math. Ann.* 2006):

Construimos una familia de campos d. u. R_t tales que $R_t \rightarrow R$, puntualmente, pero $\text{Vol}(R_t) \rightarrow \text{Vol}(R) + c(m)$

Combamiento y *Torcimiento*

$$T\nabla V \circ \nabla V$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V^k) &= \int_{\mathbb{S}^{2m+1}(1)} \sqrt{\det\left(\frac{1}{k} \text{Id} + M\right)} d\text{vol} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m+1}(1)} \sqrt{\frac{1}{k^n} + \frac{1}{k^{n-1}}\sigma_1(M) + \dots + \frac{1}{k}\sigma_{2m}(M) + \cancel{\sigma_{2m+1}(M)}}} d\text{vol} \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{2m+1}(1)} \sqrt{\sigma_{2m}(T\nabla V \circ \nabla V)} d\text{vol}.$$

*Lo definimos
como
torcimiento de V*

Combamiento y *Torcimiento*

(Borrelli and ----, *Math. Ann.* 2006):

Los campos de $S^n(1)$ con menor torcimiento son los de Hopf.

$$\int_{\mathbb{S}^{2m+1}(1)} \sqrt{\sigma_{2m}(T\nabla V \circ \nabla V)} dvol.$$

*torcimiento de
un campo $u. V$
de $S^n(1)$*

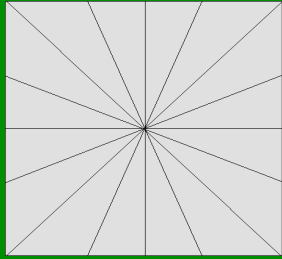
Campos de vectores unitarios (con singularidades) en esferas de dimensión 2

Teorema (Borrelli and ----, J. de Crelle, en prensa)
Los campos de vectores unitarios (sin frontera) de área mínima en la esfera de dimensión 2 son exactamente los campos de Pontriagin*

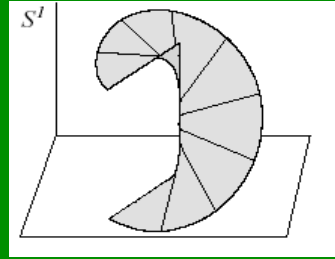
$$T^1S^2 = \mathbf{RP}^3.$$

La adherencia de la imagen del campo de Pontriagin es un \mathbf{RP}^2 totalmente geodésico.

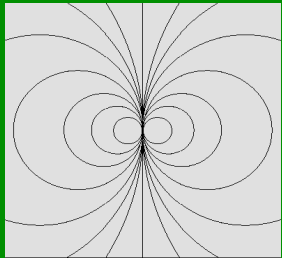
*Campos de vectores unitarios definidos en un abierto denso y tales que la adherencia de la imagen sea una subvariedad regular sin borde.



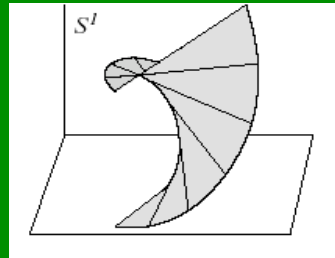
Index 1



Subvariedad cuyo borde contiene la fibra sobre un punto



Index 2



Subvariedad sin borde

Campo radial

Campo de Pontriagin

(θ, ψ)

¿Cuáles son los mejores
campos de vectores
tangentes a las esferas?

¡Gracias por vuestra atención!